ANÁLISE COMPARATIVA DO MODELO DE COBB-DOUGLAS COM ERRO ADITIVO E MULTIPLICATIVO *

MANUEL LUIZ FIGUEIRÔA **
F. PIMENTEL GOMES **

INTRODUÇÃO

Como é do conhecimento dos estudiosos do assunto, a função de Cobb-Douglas tem sido ajustada a dados de observação através de modelo matemático com erro multiplicativo.

O procedimento geral tem sido o de adotar o modelo

$$Y = \alpha X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_n^{\beta_n} (1 + \varepsilon).$$

com, $\alpha > 0$, $X_h > 0$, $(h = 1, 2 \ldots, n)$.

Após aplicação de logarítmo, obtém-se

$$\log Y = \log \alpha + \beta_1 \log X_1 + \beta_2 \log X_2 + \ldots + \beta_n \log X_n + \log (1 + \varepsilon).$$

* Entregue para publicação em 23/11/1981.

** Departamento de Matemática, E.S.A. "Luiz de Queiroz", USP.

onde para

$$y = \log Y$$
$$a = \log \alpha$$
$$x_h = \log X_h$$
$$e = \log (1 + \varepsilon)$$

tem-se

$$y = a + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + e,$$

que é uma equação de regressão linear múltipla de aplicação bem conhecida.

O que se pretende com este trabalho é, para a forma mais simples da função de Cobb-Douglas, adotar a praxe, isto é, usar no modelo matemático o erro como fator multiplicativo, e logo em seguida trabalhar o mesmo modelo com erro aditivo.

Adotando o critério da menor soma de quadrado de resíduo, se pretende comparar as regressões obtidas através dos procedimentos citados.

MODELOS ESTATÍSTICOS

Primeiro modelo (erro multiplicativo)

Seja

$$Y_1 = A\, X_i^B\, (1 + \varepsilon_1),$$

com $A > 0$, $B > 0$ e $X_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Após aplicação de logarítmo, obtém-se

$$LY_i = LA + BL\, X_i + L(1 + \varepsilon_i).$$

aqui se indica por LY_i o logarítmo neperiano de Y_i.

Com

$$y_i = L\,Y_i\ ,$$
$$a = LA\ ,$$
$$x_i = L\,X_i\ ,$$
$$e_i = L(1 + \varepsilon_i)$$

tem-se,

$$y_i = a + \beta x_i + e_i\ ,$$

que é uma equação de regressão linear simples.

Como é do conhecimento geral, a solução do sistema

$$\begin{cases} Na + B\,\Sigma\, x_i = \Sigma y_i \\ a\,\Sigma\, x_i + B\,\Sigma\, x_i^2 = \Sigma x_i y_i \end{cases}$$

fornece as estimativas $\hat{a}$ e $\hat{B}$, onde $A = \exp\,\hat{a}$.

Segundo modelo (erro aditivo)

Seja

$$Y_i = A\,X_i^B + e_i$$

com $A > 0$, $B > 0$, $X_i > 0$, $(i = 1,2,\ldots,N)$, onde A e B são parâmetros, e_i é o erro aleatório que se supõe com distribuição normal de média zero e variância σ^2, logo:

$$z = \Sigma\, e_i^2 = \Sigma(Y_i - AX_i^B)^2. \qquad (1)$$

Diferenciando (1) obtém-se:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial A}\, dA + \frac{\partial z}{\partial B}\, dB$$

onde,

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial z}{\partial A} = -\Sigma(Y_i - AX_i^B)\ X_i^B \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial B} = - A\ \Sigma(Y_i - AX_i^B)\ X_i^B\ (LX_i) \qquad (3)$$

Aí indica-se por LX_i o logarítmo neperiano de X_i. Portanto, as equações normais são:

$$\begin{cases} \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)\ X_i^b = 0 & (4) \\ \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)\ X_i^b\ (LX_i) = 0\ . & (5) \end{cases}$$

com $\hat{Y}_i = aX_i^b$.

Note-se que a e b são as estimativas de A e B, respectivamente.

É evidente que se está admitindo a condição suficiente, para a e b serem pontos de mínimo da soma de quadrado dos desvios, isto é, que a diferencial segunda de (1) em relação a a e b seja definida positiva.

Admite-se existentes as condições para o desenvolvimento de uma função pela fórmula de Taylor, e aplicou-se esse procedimento às equações (4) e (5), temos o sistema

$$\left(\Sigma X_i^{2b_o}\right)\Delta a + \left(\begin{array}{l} a_o\Sigma\ X_i^{2b_o}\ (LX_i)\ - \\ \\ -\ \Sigma(Y_i - Y_i^*)\ X_i^{b_o}\ (LX_i) \end{array}\right)\Delta b = \Sigma(Y_i - Y_i^*)\ X_i^{b_o}$$

$$\left(\Sigma X_i^{2b_o}\ (LX_i)\right)\Delta a + \left(\begin{array}{l} a_o\Sigma\ X_i^{2b_o}\ (LX_i)^2\ - \\ \\ -\ \Sigma(Y_i - Y_i^*)\ X_i^{b_o}(LX_i)^2 \end{array}\right)\Delta b = \Sigma(Y_i - Y_i^*)X_i^{b_o}(LX_i)$$

onde a_o e b_o são estimativas preliminares, e $Y_i^* = a_oX_i^{b_o}$.

Fazendo-se $f_1 = X_i^{2b_o}$, $g_1 = (Y_i - Y_i^*)\, X_i^{b_o}$ e $\ell_1 = LX_i$,

esse sistema, escrito na forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} \Sigma f_1 & a_o\, \Sigma f_1\, \ell_1 - \Sigma g_1 \ell_1 \\ \Sigma f_1\, \ell_1 & a_o\, \Sigma f_1\, \ell_1^2 - \Sigma g_1 \ell_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma g_1 \\ \Sigma g_1 \ell_1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha)$$

Ocorre, porém, que a primeira matriz acima pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \Sigma f_1 & a_o\, \Sigma f_1 \ell_1 \\ \Sigma f_1 \ell_1 & a_o\, \Sigma f_1 \ell_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \Sigma g_1 \ell_1 \\ 0 & \Sigma g_1 \ell_1^2 \end{pmatrix}$$

Os elementos da segunda matriz ou são nulos ou são somas ponderadas de desvios. Então, os valores absolutos dos seus elementos devem ser pequenos em comparação com os valores absolutos dos elementos da primeira matriz. Assim sendo, temos, aproximadamente:

$$\begin{pmatrix} \Sigma f_1 & a_o\, \Sigma f_1 \ell_1 \\ \Sigma f_1 \ell_1 & a_o\, \Sigma f_1 \ell_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma g_1 \\ \Sigma g_1 \ell_1 \end{pmatrix} \qquad (\beta)$$

Tais são as equações do método de Gauss-Newton.

Admite-se que a primeira matriz do primeiro membro do sistema (β) seja não-singular, de onde resulta ser ele compatível e determinado, isto é, com uma única solução.

Dada uma amostra de tamanho N de pares (X_i, Y_i) e estabelecidos os valores das estimativas preliminares a_o e b_o, obtém-se, com a solução do sistema (β), na aplicação do método de Gauss-Newton, os valores de Δa e Δb. Se essas correções não forem desprezíveis, obtém-se $a_o = a_1 + \Delta a$, $b_1 = b_o + \Delta b$. A seguir, utilizando-se a_1 e b_1 como novas estimativas preliminares, os cálculos são refeitos, obtendo-se novas correções de Δa e Δb.

Admitindo-se que o processo seja convergente, isto é, que os valores das correções tendam a zero, os cálculos são repetidos até que as correções Δa e Δb sejam consideradas desprezíveis. Chega-se, assim, às estimativas $\underline{a}$ e $\underline{b}$ de A e B, obtidas pelo método dos quadrados mínimos.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Tabela 1 - Dados obtidos por simulação, por PERRE DA SILVA (1978). A dose zero com suas repetições foram retiradas pelo autor

X	Repetições 1ª	2ª	3ª	4ª	Totais
0,2	52,8	50,4	55,0	56,2	214,4
0,4	70,0	68,4	66,2	75,0	279,6
0,6	88,0	87,0	85,8	84,0	344,8
0,8	103,0	101,0	100,8	99,2	404,0
1,0	109,4	111,0	110,0	109,6	440,0
1,2	120,0	119,8	121,0	115,2	476,0
1,4	128,0	129,0	127,0	128,0	512,0
1,6	133,4	132,6	131,0	131,0	528,0
1,8	135,0	132,0	134,0	131,0	532,0
2,0	132,0	134,0	130,0	128,0	524,0
2,2	130,0	127,0	130,0	129,0	516,0
2,4	119,0	117,0	124,0	120,0	480,0

Calculando-se a regressão pelo primeiro modelo (erro multiplicativo) obteve-se a equação estimada

$$Y = 103{,}5268\ X^{0{,}3705}$$

usada na análise de variância da Tabela 2.

Tabela 2 - Análise de variância da regressão, onde se adotou o erro multiplicativo

Causas de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	26.934,1767	26.934,1767	5.783,96**
Desvios da regressão	10	4.073,7000	407,3700	87,48**
(Tratamentos)	(11)	(31.007,8767)		
Resíduo	36	167,6400	4,6567	
Total	47	31.175,5167		

Observa-se na Tabela 2 efeito altamente significativo, tanto para a regressão como para os desvios da regressão.

Ao aplicar a regressão pelo segundo modelo (erro aditivo), pelo método de Gauss-Newton, com valores iniciais a_o = 103,5268, b_o = 0,3705, obtiveram-se, após cinco iterações,

$$a = 104,8620,$$
$$b = 0,3248,$$

cuja equação correspondente é:

$$\hat{Y} = 104,8620\ X^{0,3248}$$

A Tabela 3 mostra as correções obtidas com as iterações, quando se aplicou esse método.

A Tabela 4 apresenta a análise da variância da regressão com a função ajustada pelo método de Gauss-Newton.

Observa-se na Tabela 4 efeito altamente significativo, tanto para a regressão como para os desvios de regressão.

Tabela 3 - Correções correspondentes às iterações do modelo em estudo pelo método de Gauss-Newton

Correções	Iterações 1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Δa	6,1111	-0,8316	0,07250	-0,01360	0,002200
Δb	-0,0515	0,0068	-0,00120	0,00021	-0,000042

Tabela 4 - Análise de variância da regressão, onde se adotou o erro aditivo

Causas de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	27.351,2295	27.351,2295	5.873,52**
Desvios da regressão	10	3.656,6472	365,6647	78,52**
(Tratamentos)	(11)	(31.007,8767)		
Resíduo	36	167,6400	4,6587	
Total	47	31.175,5167		

CONCLUSÕES

a) Para o modelo ajustado aos dados do ensaio conclui-se que o modelo que adotou erro aleatório aditivo apresentou um melhor ajustamento que o tradicional de erro aleatório multiplicativo;

b) a convergência ocorreu com bastante rapidez, de tal sorte que poucas iterações foram necessárias.

Tabela 5 - Demonstrativo do comportamento das funções ajustadas

X	$\bar{Y}$	$\hat{Y} = 103,5268X^{0,3705}$	$\bar{Y}-\hat{Y}$	$(\bar{Y}-\hat{Y})^2$
0,2	53,60	57,0275	-3,4275	11,7478
0,4	69,90	73,7252	-3,8252	14,6322
0,6	86,20	85,6757	0,5243	0,2749
0,8	101,00	95,3120	5,6880	32,3533
1,0	110,00	103,5268	6,4732	41,9023
1,2	119,00	110,7617	8,2383	67,8696
1,4	128,00	117,2717	10,7283	115,0964
1,6	132,00	123,2195	8,7805	77,0972
1,8	133,00	128,7156	4,2844	18,3561
2,0	131,00	133,8395	- 2,8395	8,0628
2,2	129,00	138,6502	- 9,6502	93,1264
2,4	120,00	143,1928	-23,1928	537,9060
				1018,4250

X	$\bar{Y}$	$\hat{Y} = 104,862X^{0,3248}$	$\bar{Y}-\hat{Y}$	$(\bar{Y}-\hat{Y})^2$
0,2	53,60	62,1716	- 8,5716	73,4723
0,4	69,90	77,8694	- 7,9694	63,5113
0,6	86,20	88,8303	- 2,6303	6,9185
0,8	101,00	97,5307	3,4693	12,0360
1,0	110,00	104,8619	5,1381	26,4001
1,2	119,00	111,2591	7,7409	59,9215
1,4	128,00	116,9715	11,0285	121,6278
1,6	132,00	122,1563	9,8437	96,8984
1,8	133,00	126,9200	6,0800	36,9664
2,0	131,00	131,3385	- 0,3385	0,1146
2,2	129,00	135,4679	- 6,4679	41,8337
2,4	120,00	139,3510	-19,3510	374,4612
				914,1618

MÉTODO

Na execução do exemplo de aplicação utilizou-se uma máquina HP-25, através dos seguintes programas:

Ajustamento do primeiro modelo (erro multiplicativo)

PROGRAMA - 1	
fLN	RCL7
↑	X
gx^2	CHS
STO+2	RCL4
R↓	+
x ⇄ Y	RCL3
fLN	:
Σ+	ge^x
GTO 00	STO 0
RCL5	R/S
RCL7	RCL1
RCL4	R/S
x	x ⇄ Y
RCL3	R↓
:	X
-	RCL2
RCL6	RCL4
RCL7	g x^2
g x^2	RCL3
RCL3	:
:	-
-	:
:	GTO 00
STO 1	

Etapa	Instruções	Dados de entrada	Teclas	Dados de saída
1	Gravar o programa		f REG f PRGM	
2	Iniciar		f REF f PRGM	
3	Para i=1,...,n introduzir			
	o valor de X	x_i	↑	
	e o valor de Y	y_i	R/S	i
4	Computar as constantes		GTO 10 R/S	a_o
			R/S	b_o
5	Coeficiente de determinação		R/S	r^2

Ajustamento do segundo modelo (erro aditivo)

Programa - 2	
fLN	X
STO6	STO+2
fLASTx	RCL6
b_o	X
FY^x	STO+1
STO5	RCL5
A_o	gx^2
X	STO+3
R/S	RCL6
x ⇄ Y	X
-	STO+4
RCL5	RCL6
X	X
STO+7	STO+0
RCL6	GTO 00

Etapa	Instruções	Dados de entrada	Teclas	Dados de saída
1	Gravar o programa			
2	Iniciar		f PRGM	
3	Para i=1,...,n introduzir o valor x	x_i	R/S	
	e o valor de Y	Y_i	R/S	$RCL0=\Sigma x^{2b_o}(Lx)^2$ $RCL1=\Sigma x^{b_o}_{b_o}(\Delta Y)(Lx^2)$ $RCL2=\Sigma x_{2b_o}(\Delta Y)(Lx)$ $RCL3=\Delta\ x_{2b_o}(Lx)$ $RCL4=\Delta\ x_{b_o}\ (Lx)$ $RCL5=\ x$ $RCL6=\ Lx$ $RCL7=\ \Sigma(\Delta Y)\ x^{bo}$

Obs.: Aqui $\Delta Y = Y_i^* - Y_i$

Inversão de uma matriz de 2ª ordem

Programa - 3	
RLC4	RCLO
RCL1	:
X	CHS
RCL2	R/S
RCL3	RCL3
X	RCLO
-	:
STO 0	CHS
R/S	R/S
RCL4	RCL1
RCLO	RCLO
:	:
R/S	GTO 00
RCL2	

Etapa	Instruções	Dados de entrada	Teclas		Dados de saída
1	Gravar o programa				
2	Armazenar a matriz	a_{11}	STO 1		
		a_{12}	STO 2		
		a_{21}	STO 3		
		a_{22}	STO 4		
3	Cálculo de determinante		↑	PRGM R/S	DET
4	Cálculo da matriz inversa		R/S		a_{11}^{-1}
			R/S		a_{12}^{-1}
			R/S		a_{21}^{-1}
			R/S		a_{22}^{-1}

SUMMARY

A COMPARATIVE ANALYSIS OF COBB-DOUGLAS MODEL WITH ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE ERROR

This paper discusses the fitting of a Cobb-Douglas response curve $Y_i = \alpha X_i^{\beta}$, with additive error, $Y_i = \alpha X_i^{\beta} + e_i$, instead of the usual multiplicative error $Y_i = \alpha X_i^{\beta} (1 + e_i)$.

The estimation of the parameters α and β is discussed. An example is given with use of both types of error.

LITERATURA CITADA

CAMARGO, J.R.V de, 1974. **Análise da produtividade nas culturas de algodão e soja com a aplicação do modelo Ulveling-Fletcher**, Piracicaba, ESALQ/USP, 131p. (dissertação de mestrado)

COSTA LIMA, A.R., 1980. **Superfícies de resposta em experimentos fatoriais 3^3 incompletos de adubação NPK em mandioca no Estado do Ceará**, Piracicaba, ESALQ/USP, 100pp. (dissertação de mestrado).

CRÔCOMO, O.H.G., 1974. **Oferta de milho e de soja. Uma análise a partir de funções de produção**, Piracicaba, ESALQ / USP, 94pp. (dissertação de mestrado).

DIXON, J.W.; MASSEY Jr., F.J., 1951. **Introduction to Statistical Analysis**, Nova York, McGraw-Hill, 370pp.

ENGLER, J.J. de C., 1968. **Análise da produtividade de recursos na agricultura**, Piracicaba, ESALQ/USP, 102pp. (tese de doutoramento).

ENGLER, J.J. de C., 1978. **Análise da produtividade agrícola entre regiões do Estado de São Paulo**, Piracicaba, ESALQ / USP, 132pp. (tese de livre docência).

FIGUEIRÔA, M.L., 1980. **A função de Cobb-Douglas a partir do modelo matemático com erro aditivo**, Piracicaba, ESALQ/USP, 55p. (dissertação de mestrado).

GIRÃO, J.A., 1965. **A função de produção de Cobb-Douglas e a análise inter-regional da produção agrícola**, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, Centro de Estudos de Economia Agrária, 119pp.

HARTLEY, H.D., 1981. The modified Gauss-Newton method for the fitting of non-linear regression, Functions by Least Square. Technometrics **3**: 269-280.

HOFFMANN, R.; VIEIRA, S., 1977. **Análise de regressão. Uma Introdução à Econometria**, São Paulo, HUCITEC-EDUSP, 339pp.

MELO, F.I.O., 1976. **Aplicação do método modificado de Gauss-Newton para estimar os parâmetros da equação de Mitscherlich**, Piracicaba, ESALQ/USP, 74pp. (dissertação de mestrado).

NEVES, E.M., 1972. **Uma função de produção de leite no Estado de São Paulo**, Piracicaba, ESALQ/USP, 72pp. (tese de doutoramento).

NOJIMOTO, T., 1976. **Problemas encontrados na estimação e interpretação de funções de produção agrícola**, Piracicaba - ESALQ/USP, 118pp. (dissertação de mestrado).

PERRE DA SILVA, M.A., 1978. **Segunda aproximação de Mitscherlich, $Y = A\,[1 - 10^{-c(x+b)}]\,10^{-k(x+b)^2}$ aplicada à adubação mineral**, Piracicaba, ESALQ/USP, 96pp. (dissertação de mestrado).

PIMENTEL GOMES, F.; ZAGATTO, A.G., 1967. Aspectos econômicos da Adubação. In: MALAVOLTA, E. **Manual de Química Agrícola-Adubos e Adubação**, São Paulo, Agr. Ceres, 606pp.

SIMONSEN, M.H., 1971. **Teoria Microeconômica**, 4ª edição, Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, (vol. 1), 425pp.

Impresso por
R. Vieira Gráfica e Editora Ltda.
Rua do Açúcar, 244
Campinas - SP - CEP 13.100

COMPOSIÇÃO E DIAGRAMAÇÃO:
Jorge Luiz Diorio - Fone 34-3362
PIRACICABA-SP