Mudança de Eixos e Símbolos Projetivos (*)

EDUARDO A. SALGADO

Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz»

(*) Recebido para publicação em 14/6/60.

1 — INTRODUÇÃO

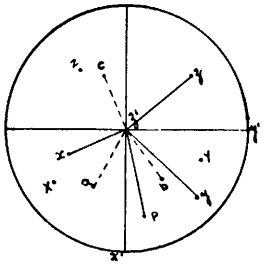

fig 1

Conhecido o símbolo mileriano de uma face, em um sistema de eixos cristalográficos, pode-se determinar o símbolo da mesma face em outro sistema, mediante o uso de fórmulas adequadas à mudança de eixos coordenados e cuja dedução se encontra em tratados de cristalografia.

Vamos deduzir tais expressões, valendo-nos dos símbolos projetivos e dos cosenos de Wulff.

2 — DEDUÇÃO

Na figura 1 representam-se, em projeção estereográfica, os dois sistemas *XYZ* e *xyz* e ainda o sistema retangular *x'y'z'*, utilizado na determinação dos símbolos projetivos.

A face de pólo *P* tem, no sistema *XYZ*, o símbolo (qrs), no sistema *xyz* o símbolo (q_1 r_1 s_1) e o símbolo projetivo (q' r' s').

Os pontos *a, b, c,* representam, respectivamente, os pólos dos círculos máximos *YZ, XZ, XY* e as coordenadas esféricas φ são tomadas a partir de *y'*.

Sejam *m, n, p* os cosenos diretores da face parametral do sistema *xyz,* neste sistema.

Temos, pelo teorema dos cosenos de Wulff:

$$q_1 = \frac{\cos\rho x.\cos\rho P + \operatorname{sen}\rho x.\operatorname{sen}\rho P.\cos(\varphi x - \varphi P)}{m} \quad \ldots (1)$$

$$r_1 = \frac{\cos\rho y \cos\rho P + \operatorname{sen}\rho y.\operatorname{sen}\rho P.\cos(\varphi P - \varphi y)}{n}$$

$$s_1 = \frac{\cos\rho z.\cos\rho P + \operatorname{sen}\rho z.\operatorname{sen}\rho P.\cos(\varphi P - \varphi z)}{p}$$

O plano *YZ*, cujo símbolo é (100) em *XYZ,* passa a ter os seguintes índices em *xyz*:

$$h_1 = \frac{\cos\rho x.\cos\rho a + \operatorname{sen}\rho x.\operatorname{sen}\rho a.\cos(\varphi x - \varphi a)}{m} \quad \ldots (2)$$

$$k_1 = \frac{\cos\rho y.\cos\rho a + \operatorname{sen}\rho y.\operatorname{sen}\rho a.\cos(\varphi a - \varphi y)}{n}$$

$$l_1 = \frac{\cos\rho z.\cos\rho a + \operatorname{sen}\rho z.\operatorname{sen}\rho a.\cos(\varphi a - \varphi z)}{p}$$

Os planos XZ (010) e XY (001) darão expressões idênticas para $(h_2k_2l_2)$ e $(h_3k_3l_3)$.

De (1) tira-se:

$$q_1 = \frac{\cos\rho x}{m}.\cos\rho P + \frac{\operatorname{sen}\rho x.\cos\varphi x}{m}.\operatorname{sen}\rho P.\cos\varphi P +$$

$$+\frac{\operatorname{sen}\rho x.\operatorname{sen}\varphi x}{m}.\operatorname{sen}\rho P.\operatorname{sen}\varphi P.$$

De (2) obtém-se, idênticamente:

$$h_1 = \frac{\cos\rho x}{m}.\cos\rho a + \frac{\operatorname{sen}\rho x.\cos\varphi x}{m}.\operatorname{sen}\rho a.\cos\varphi a +$$

$+\dfrac{\operatorname{sen}\rho x.\operatorname{sen}\varphi x}{m}.\operatorname{sen}\rho a.\operatorname{sen}\varphi a$ e expressões semelhantes para h_2 e h_3, podem ser conseguidas.

Façamos $\dfrac{\cos\rho x}{m} = A$; $\dfrac{\operatorname{sen}\rho x.\cos\varphi x}{m} = B$;

$\dfrac{\operatorname{sen}\rho x.\operatorname{sen}\varphi x}{m} = C.$.

Podemos escrever, então:

$$q_1 = A.\cos\rho P + B.\operatorname{sen}\rho P.\cos\varphi P + C.\operatorname{sen}\rho P.\operatorname{sen}\varphi P$$
$$h_1 = A.\cos\rho a + B.\operatorname{sen}\rho a.\cos\varphi a + C.\operatorname{sen}\rho a.\operatorname{sen}\varphi a$$
$$h_2 = A.\cos\rho b + B.\operatorname{sen}\rho b.\cos\varphi b + C.\operatorname{sen}\rho b.\operatorname{sen}\varphi b$$
$$h_3 = A.\cos\rho c + B.\operatorname{sen}\rho c.\cos\varphi c + C.\operatorname{sen}\rho c.\operatorname{sen}\varphi c$$

Nestas expressões ponhamos em evidência $\operatorname{sen}\rho P$ e os valores que lhe correspondem: Temos:

$$q_{1\,1} = \operatorname{sen}\rho P\ [A.\operatorname{cotg}\rho P + B.\cos\varphi P + C.\operatorname{sen}\varphi P] \ldots (3)$$
$$h_1 = \operatorname{sen}\rho a\ [A.\operatorname{cotg}\rho a + B.\cos\varphi a + C.\operatorname{sen}\varphi a] \ldots (4)$$
$$h_2 = \operatorname{sen}\rho b\ [A.\operatorname{cotg}\rho b + B.\cos\varphi b + C.\operatorname{sen}\varphi b] \ldots (5)$$
$$h_3 = \operatorname{sen}\rho c\ [A.\operatorname{cotg}\rho c + B.\cos\varphi c + C.\operatorname{sen}\varphi c] \ldots (6)$$

Em virtude do *teorema 3* dos símbolos projetivos (BOLDYREV, (1934) a expressão (3) transforma-se em:

$$q_1 = \operatorname{sen}\rho P \left\{ As' + Br' + Cq' \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

De acôrdo com a expressão [13]da página 151 da Cristalografia atrás mencionada, os planos (100), (010) e (001) em XYZ terão para símbolos projetivos, respectivamente, $s_1s_2s_3$; $t_1t_2t_3$; $u_1u_2u_3$ e as expressões (4), (5) e (6) mudam para:

$$h_1 = \operatorname{sen}\rho a \left\{ As_3 + Bs_2 + Cs_1 \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$h_2 = \operatorname{sen}\rho b \left\{ At_3 + Bt_2 + Ct_1 \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$h_3 = \operatorname{sen}\rho c \left\{ Au_3 + Bu_2 + Cu_1 \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Na expressão (7) substituam-se os índices projetivos pelos seus respectivos valores, obtidos da expressão [13] de Boldyrev. Obtém-se:

$$q_1 = \operatorname{sen}\rho P \left\{ \begin{array}{l} A(qs_3 + rt_3 + su_3) + B(qs_2 + rt_2 + \\ + su_2) + C(qs_1 + rt_1 + su_1) \end{array} \right\} =$$

$$= \operatorname{sen}\rho P \left\{ \begin{array}{l} q(As_3 + Bs_2 + Cs_1) + r\,(At_3 + Bt_2 \times Ct_1) + \\ + s(Au_3 + Bu_2 + Cu_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (11) \end{array} \right.$$

De (11) tira-se, levando em conta (8), (9) e (10):

$$q_1 = \operatorname{sen}\rho P \left\{ \frac{h_1 q}{\operatorname{sen}\rho a} + \frac{h_2 r}{\operatorname{sen}\rho b} + \frac{h_3 s}{\operatorname{sen}\rho c} \right\} ,$$

obtendo-se expressões idênticas para r_1 e s_1.

Dividindo por senρP e fazendo $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\rho a} = L$, $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\rho b} = L'$, $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\rho c} = L''$ chega-se às expressões obtidas por BUTTGENBACH, (1935):

$$\begin{array}{lllllll} q_1 & = & Lh_1q & + & L'h_2r & + & L''h_3s \\ r_1 & = & Lk_1q & + & L'k_2r & + & L''k_3s \\ s_1 & = & Ll_1q & + & L'l_2r & + & L''l_3s \end{array}$$

3. — RESUMO

O presente trabalho apresenta uma nova dedução das expressões que servem, em cristalografia, à mudança de eixos coordenados, valendo-se o autor da projeção estereográfica.

4. — SUMMARY

The present work presents a new deduction of the expressions which are used to the change of the coordinate axes in Crystallography, the author using the stereographic projection.

5 — LITERATURA CITADA

BOLDYREV, A.K.-1934 — Cristalografia — tradução do russo para o espanhol por Rafael Candel Vila — Editorial Labor.

BUTTGENBACH, H. H.-1935 — Les minéraux et les roches — Dunod, Paris, p. 321.