Arq. Fac. Hig. S. Paulo
19(1/2):135-141, jun./dez. 1965.

O PROCESSO DE RENOVAÇÃO GENERALIZADO DE KENDALL E A NECESSIDADE DA CONSTRUÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS DE DIFUSÃO *

RUBENS MURILLO MARQUES **

A inadequacidade do ajuste das equações do Processo de Renovação — P.R. (Birth and Death Process) ao problema do crescimento populacional, pelo fato dêle não levar em conta as variações a que estão sujeitos os coeficientes de natalidade e de mortalidade no decurso do tempo, conforme salientamos em nosso trabalho "Determinismo e Probabilidade em Biologia" [4], sugeriu a construção de modelos do mesmo tipo, porém mais gerais, no sentido de permitir expressar estas variações. Em 1948, Kendall [2] introduziu um novo processo que denominou "Generalized Birth and Death Process", Processo de Renovação Generalizado — P.R.G., e que consistiu numa generalização do P.R. já existente, no sentido de obtenção da expressão para $P_x(t) = P\{X(t) = x \mid X(O) = 1\}$, ou seja, para a probabilidade de que tenhamos x indivíduos na população no instante t dado que no instante inicial tínhamos apenas um, quando os coeficientes de natalidade e mortalidade fôssem funções quaisquer do tempo.

Mantendo as mesmas pressuposições utilizadas para a construção do P.R., exceto no que diz respeito a λ (coeficiente de natalidade) e μ (coeficiente de mortalidade), que considerou como funções quaisquer $\lambda(t)$ e $\mu(t)$ do tempo, a expressão obtida para $P_x(t)$ manteve-se da mesma forma que a do P.R., ou seja:

$$P_x(t) = \begin{cases} \{1-\alpha(t)\}\{1-\beta(t)\}\,.\,\beta(t)^{x-1} & \text{para } x = 1, 2, 3, \ldots \\ \alpha(t) & \text{para } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde:

$$\alpha(t) = 1 - \frac{e^{h(t)}}{w(t)} \tag{2}$$

$$\beta(t) = 1 - \frac{1}{w(t)} \tag{3}$$

Recebido para publicação em 4-9-1965.

* Trabalho da Cadeira de Estatística Aplicada à Saúde Pública (Prof. Elza Berquó) da Faculdade de Higiene e Saúde Pública da USP. Palestra apresentada nos «Seminários Sôbre os Processos Estocásticos e suas Aplicações ao Estudo do Crescimento Populacional», dezembro de 1964, realizados pela Disciplina Autônoma Estatística Matemática, para o Curso de Estatística Aplicada à Engenharia Sanitária.

** Professor Assistente da Cadeira.

$$h(t) = \int_0^t \{\mu(s) - \lambda(s)\}\, ds \tag{4}$$

$$w(t) = e^{-h(t)} \{1 + \int_0^t \mu(s)\, e^{h(s)}\, ds\} \tag{5}$$

Em particular, a probabilidade de uma eventual extinção da população, é dada por;

$$P_o(t) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\int_0^t \mu(s)\, e^{h(s)}\, ds}} \tag{6}$$

Isto veio mostrar que, conhecida a evolução dos coeficientes de natalidade e de mortalidade no decurso do tempo é possível a obtenção, sob êste modêlo, das probabilidades de um fixado número de indivíduos na população, num dado instante. Assim, se num instante, considerado o inicial, tivermos *i* indivíduos na população, a probabilidade de que no instante t tenhamos j indivíduos nesta população, $P_{ij}(t)$, é dada pela expressão:

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=o}^{i} \binom{i}{n} \cdot \binom{i+j-n-1}{i-1} \times \{\alpha(t)\}^{i-n} \{\beta(t)\}^{j-n} \{1 - \alpha(t) - \beta(t)\}^{n} \tag{7}$$

Conquanto esta expressão nos permita a previsão de populações com as suas probabilidades respectivas, ela é pouco manejável do ponto de vista prático, pelo menos pelos métodos de cálculo convencionais e, até o presente momento, não se tem uma fórmula aproximada para esta expressão, com características operacionais satisfatórias.

Diante da impossibilidade da solução exata do problema da previsão probabilística de populações, dadas as dificuldades que apresenta a (7), tentou-se uma solução aproximada para o problema no sentido de imaginar, para grandes populações, que a variável — número de indivíduos na população num dado instante — fôsse *contínua,* o que conduziria a um modêlo estocástico contínuo no tempo e também agora no espaço dos estados (entende-se por espaço dos estados de um processo estocástico aos valores que a variável aleatória pode tomar num dado instante). A tais processos, contínuos tanto no tempo como no espaço dos estados, denominamos *Processos de Difusão* (P.D.). Graças aos trabalhos teóricos de Kolmogorov [3] e de Feller [1], foi possível demonstrar que cada Processo de Markov (dentre os quais está incluído o Processo de Renovação) discreto no espaço dos estados pode ser aproximado por um Processo de Markov contínuo, isto é, por um Processo de Difusão. No caso do problema do crescimento populacional, a aproximação para a continuidade parece ser bem pouco restritiva e o seu tratamento como um P.D. é bastante satisfatório quando comparado com os resultados exatos. Vemos pois, que tratar o problema sob êste nôvo prisma consiste, analiticamente, em buscar não uma expressão para $P_x(t)$ ou uma equação diferencial a que $P_x(t)$ satisfaça mas, tentar obter a função densidade de probabilidades da variável aleatória — número de indivíduos na população num dado instante t, dado que num instante inicial t_0 tínhamos um certo número x_0 de indivíduos na população — ou seja obter a função $f(x, t; x_0, t_0)$ ou então uma equação diferencial a que ela satisfaça.

Pode-se demonstrar que, qualquer que seja o processo estocástico em questão, a aproximação de um processo discreto por um de difusão conduz à seguinte equação diferencial para $f(x, t; x_0, t_0)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{a(x, t)\, f(x, t; x_0 t_0)\} + \\ - \frac{\partial}{\partial x} \{b(x, t)\, f(x, t; x_0, t_0)\} \tag{8}$$

onde a (x, t) e b (x, t) são as funções que caracterizam o tipo particular de processo que o P.D. procura descrever como uma aproximação.

A função b (x, t) é definida como:

$$b(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \int (y - x)\, f(x, t - \Delta t; y, t)\, dy \tag{9}$$

isto é, b (x, t) é o limite do número médio de mudanças (nascimentos e/ou mortes) esperado num intervalo de tempo $(t - \Delta t, t)$, de amplitude Δt quando $\Delta t \longrightarrow 0$ e é chamada *média infinitesimal das mudanças do processo* X (t).

Anàlogamente, a (x, t) é definida como sendo a *variância infinitesimal das mudanças do processo* X (t) e é dada por:

$$a(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \int (y - x)^2\, f(x, t - \Delta t; y, t)\, dy \tag{10}$$

Vemos, portanto, que a construção de um P.D. depende da escolha apropriada das funções a (x, t) e b (x, t). No que se segue, mostraremos como estas funções podem ser escolhidas a fim de que gerem o P.D. correspondente ao P.R.. Assim procedemos, pois o P.D. correspondente ao P.R.G. ainda não foi estabelecido dadas as dificuldades de ordem teórica existentes.

No caso do crescimento populacional estar sendo descrito por um P.R., onde então os coeficientes de natalidade e de mortalidade são constantes no decurso do tempo, devemos imaginar que as funções $a(x, t)$ e $b(x, t)$ para o P.D. correspondente que se quer construir não devam depender do tempo, pois as mudanças que ocorrerão num intervalo de tempo de amplitude Δt deverão depender tão sòmente desta amplitude e não explicitamente do instante t considerado. Com isto, devemos impôr, para a construção do P.D. análogo ao P.R. que:

$$a(x, t) = a(x) \qquad (11)$$

$$b(x, t) = b(x) \qquad (12)$$

e além disto que estas funções sejam proporcionais ao número de indivíduos existentes em cada instante em que uma mudança possa vir a ocorrer, isto é, proporcionais a x. Com isto, devemos ter para as (11) e (12):

$$a(x, t) = a(x) = a \, . \, x \qquad (13)$$

$$b(x, t) = b(x) = b \, . \, x \qquad (14)$$

onde *a* e *b* são constantes.

As constantes *a* e *b* podem ser determinadas heurìsticamente a partir da tabela abaixo:

Estado da população no instante $t - \Delta t$	Estado da população no instante t	Mudanças no intervalo $(t - \Delta t, t)$	Probabilidades com que se dão as mudanças
x	$x + 1$	$+ 1$	$\lambda \, . \, x \, . \, \Delta t$
x	$x - 1$	$- 1$	$\mu \, . \, x \, . \, \Delta t$
x	x	0	$1 - (\lambda + \mu) \, . \, x \, . \, \Delta t$

onde estamos suponde que a amplitude Δt é de tal oidem que a probabilidade de que mais de uma mudança ocorra é um evento com probabidade zero.

À base da tabela acima temos:

número médio de mudanças
no intervalo $(t - \Delta t, t)$ $\quad = (\lambda - \mu) . x . \Delta t \qquad (15)$

variância do número de mudanças no intervalo $(t - \Delta t, t) = (\lambda + \mu).x.\Delta t - (\lambda - \mu)^2.x^2.\Delta t^2$ (16)

logo, utilizando as definições (9) e (10) vem:

$$b(x, t) = b(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} (\lambda - \mu).x.\Delta t = (\lambda - \mu).x \tag{17}$$

$$a(x, t) = a(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{\lambda + \mu).x.\Delta t - (\lambda - \mu)^2.x^2.\Delta t^2\} =$$

$$= (\lambda + \mu).x \tag{18}$$

e, portanto, pelas (13) e (14) vem, respectivamente, que:

$$b = \lambda - \mu \tag{19}$$

$$a = \lambda + \mu \tag{20}$$

Com isto, a equação (8) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t; x_o, t_o) = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \{xf(x, t; x_o t_o)\}}{\partial x^2} +$$

$$- (\lambda - \mu) \times \frac{\partial \{x.f(x, t; x_o, t_o)\}}{\partial x} \tag{21}$$

cuja solução é dada por:

$$f(x, t; x_o, t_o) = \frac{\lambda - \mu}{(\lambda + \mu)\{e^{(\lambda-\mu)t} - 1\}} \left\{\frac{x_o \cdot e^{(\lambda-\mu)t}}{x}\right\}^{1/2} \times$$

$$\exp.\left[\frac{-2(\lambda - \mu)\{x_o \cdot e^{(\lambda-\mu)t} + x\}}{(\lambda + \mu)(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}\right] \cdot I_1 \left\{\frac{4(\lambda - \mu) \cdot \{x_o \cdot x \cdot e^{(\lambda-\mu)}\}^{1/2}}{(\lambda + \mu) \cdot (e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}\right\} \tag{22}$$

onde $I_1(s)$ é a função de Bessel de 1.ª espécie e vale:

$$I_1(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu + 1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2\nu+1} \tag{23}$$

e se encontra amplamente tabelada.

É interessante notar que podemos, a partir da equação (22) ou mais fàcilmente da (21) obter a esperança e a variância do número de indivíduos em cada instante, m (t) e V (t), respectivamente, e que são dados por:

$$m(t) = x_0 \,.\, e^{(\lambda-\mu)t} \tag{24}$$

$$V(t) = x_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t} \left\{ e^{(\lambda-\mu)t} - 1 \right\} \tag{25}$$

expressões estas idênticas às do P.R..

A probabilidade de uma eventual extinção na população no instante t, $P_0(t)$ é dada por:

$$P_0(t) = e^{-\frac{2(\lambda-\mu)\, x_0\, e^{(\lambda-\mu)t}}{(\lambda+\mu)\,(e^{(\lambda-\mu)t}-1)}} \tag{26}$$

e no caso de $x_0 = 1$, $\lambda = 0.70$ e $\mu = 0{,}20$ temos:

$$P_0(1) = 5{,}9\%, \quad P_0(2) = 17{,}2\%, \quad P_0(3) = 23{,}0\%$$

que comparadas com os valores respectivos obtidos para o P.R. [4],

$$P_0(1) = 13{,}6\%, \quad P_0(2) = 20{,}0\%, \quad P_0(3) = 23{,}7\%$$

mostram que as probabilidades de uma eventual extinção previstas pelo P.D. não são iguais àquelas previstas pelo P.R.

A seqüência $P_0(t)$, $t = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ converge, em ambos os processos, para 1 se $\lambda \leq \mu$ e se $\lambda > \mu$ para exp. $\left[\frac{2\, x_0 \,.\, (\lambda-\mu)}{\lambda+\mu\,.}\right]$ no P.D. e para $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x_0}$ no P.R., sendo esta uma das únicas diferenças entre os dois processos.

No caso apresentado de $x_0 = 1$, $\lambda = 0{,}70$ e $\mu = 0{,}20$, $P_0(t)$ converge para o valor 32,96% no Processo de Difusão e para 28,57% no Processo de Renovação.

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é o de apresentar alguns problemas pertinentes à construção de modêlos estocásticos para o estudo do crescimento populacional e as dificuldades ainda existentes nêste campo no sentido da obtenção de modêlos cada vez mais aprimorados para a descrição da dinâmica populacional. Para tanto, apresentamos o Processo de Renovação Linear e Homogêneo (Linear Homogeneous Birth and Death

Process) e à base dêste e de suas falhas conduzimo-nos para o Processo de Renovação Generalizado, introduzido por Kendall (Generalized Birth and Death Process). Diante das dificuldades que êste processo apresenta, introduzimos, no sentido de uma aproximação, o conceito de Processo de Difusão, mostrando, no entanto, que o Processo de Difusão análogo ao Processo de Renovação Generalizado ainda não pode ser obtido dadas as dificuldades de ordem teórica, dispondo-se apenas do Processo de Difusão correspondente ao Processo de Renovação Linear e Homogêneo. O trabalho contém ainda uma comparação entre os resultados esperados no Processo de Renovação Homogêneo e no Processo de Difusão que lhe corresponde.

SUMMARY

The purpose of this paper is to present some problems concerning the construction of stochastic models for population growth and the dificulties yet existing in this field in respect to have more realistic and elabored models for describing the population dynamics. With this in mind, we introduced the Linear Homogeneous Birth and Death Process and after analysing it as its limitations we presented the Generalized Birth and Death Process, due to Kendall. Since this last metioned process involves complicated computional formulas we introduced, as an approximation, the concept of a Difusion Process, showing however that Difusion Process analogue to the Generalized Birth and Death Process can not yet be obtained due to theoretical dificulties. Thus we are left with the Difusion Process analogue to the Homogeneous Birth and Death Process. The paper contains also a comparison between the expected results under the Homogeneous Birth and Death Process and the correspondente Difusion Process.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FELLER, W. The birth and death process as diffusion process. *J. Math. Pure. Appl.,* **38**:301-345, 1959.

2. KENDALL, D. G. On the generalized birth and death process. *Ann. Math. Statist.,* **19**(1):1-15, Mar. 1948.

3. KOLMOGOROV, A. N. Transition of branching processes into diffusion processes and some problems in genetics. *Teor. Veroyat. Primen.,* **4**:233-236, 1959.

4. MARQUES, R. M. & BERQUÓ, Elza Determinismo e probabilidade em biologia. *Arq. Fac. Hig. S. Paulo* **18**(1/2):85-92, jan./dez., 1964.