UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE HIGIENE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE HIGIENE E SAÚDE PÚBLICA DO ESTADO

DIRETOR, PROF. G. H. DE PAULA SOUZA

BOLETIM N. 64

ALGUMAS NOTAS SOBRE O NÚMERO DE ASSOCIAÇÕES, DE CORRELAÇÕES E DE REGRESSÕES

P. EGYDIO CARVALHO
1.º ASSISTENTE

HELENA R. PENTEADO
AUXILIAR TÉCNICA

1 9 3 8

IMPRENSA OFICIAL DO ESTADO

SÃO PAULO

ALGUMAS NOTAS SOBRE O NÚMERO DE ASSOCIAÇÕES, DE CORRELAÇÕES E DE REGRESSÕES

P. EGYDIO CARVALHO
1.º ASSISTENTE

HELENA R. PENTEADO
AUXILIAR TÉCNICA

I

NÚMERO DE ASSOCIAÇÕES DE n ATRIBUTOS, EM UNIVERSOS RESTRITOS POR p ATRIBUTOS

Esta determinação é indutiva, resultante da análise das expressões obtidas para valores particulares de p.

Em primeiro lugar, no universo geral, isto é, no caso de $p=0$, o número de associações é:

$$\binom{n}{2} = 2^0 \binom{n}{2} \binom{n-2}{0}$$

No universo restrito por um atributo, cada uma destas $\binom{n}{2}$ associações dará origem a tantas novas associações, quantos forem os atributos que dela não fazem parte — $n-2$ — sendo este resultado multiplicado por 2; este último produto é realizado, considerando-se que cada um dos atributos restantes pode se apresentar sob duas formas diversas; assim, se C fôr um dos atributos restantes, a restrição pode ser feita, seja para o universo dos $C's$, seja para o dos $\gamma's$. Portanto, o número de associações em universos restritos por um atributo será:

$$2\binom{n}{2}(n-2) = 2^1 \binom{n}{2} \binom{n-2}{1}$$

Em universos restritos por dois atributos, cada uma das $\binom{n}{2}$ associações do universo geral daria origem a tantas associações, quantas fossem as combinações, duas a duas, das $2\,(n-2)$ formas em que os $n-2$ atributos restantes podem se apresentar; este número, porém, está acrescido dos grupos resultantes das reuniões das duas formas do mesmo atributo; sendo o total destes grupos, evidentemente, igual a $n-2$, temos para número de associações com que concorre cada uma das $\binom{n}{2}$ associações do universo geral: $\binom{2\,(n-2)}{2} - (n-2) = 2^2\binom{n-2}{2}$.

O total de associações existentes em universos restritos por dois atributos será, pois, de:

$$2^2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$

Se o número de atributos que restringem o universo se eleva a tres, cada uma das $\binom{n}{2}$ associações do universo geral daria origem a tantas associações, quantas fossem as combinações, tres a tres, das $2\,(n-2)$ formas com que se podem apresentar os $n-2$ atributos restantes; este número, porém, está acrescido dos grupos em que entram duas formas de um mesmo atributo e uma das formas dos $n-3$ atributos restantes; sendo o total de tais grupos igual a $2\,(n-2)\,(n-3)$, pois cada um dos $n-2$ grupos, constituidos pela união das formas de um mesmo atributo, dá origem a tantos grupos de tres atributos, quantas são as formas dos atributos restantes — $2\,(n-3)$ —, temos, para número de associações em universos restritos por tres atributos, oriundas de uma das $\binom{n}{2}$ associações do universo geral: $\binom{2\,(n-2)}{3} - 2\,(n-2)\,(n-3) = 2^3\binom{n-2}{3}$.

Portanto, o número total de associações em universos restritos por tres atributos será:

$$2^3\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}$$

Generalizando os nossos resultados, o número de associações em universos restritos por p atributos será:

$$2^p \binom{n}{2} \binom{n-2}{p}$$

II

NÚMERO TOTAL DE ASSOCIAÇÕES POSSIVEIS DE n ATRIBUTOS

$$\binom{n}{2} \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-2}{p} 2^p = \binom{n}{2} 3^{n-2}$$

III

NÚMERO TOTAL DE ASSOCIAÇÕES PARCIAIS DE n ATRIBUTOS

$$\binom{n}{2} 3^{n-2} - \binom{n}{2} = \binom{n}{2} \left(3^{n-2} - 1\right)$$

IV

NÚMERO DE CORRELAÇÕES DE ORDEM p, NO CASO DE n VARIÁVEIS

Procede-se de forma análoga à ultilizada para a determinação do número de associações em universos restritos, analizando-se os resultados obtidos para valores particulares de p.

É evidente, em primeiro lugar, que o número de correlações de ordem 0, que se podem formar com n variáveis, é igual a:

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{2} \binom{n-2}{0}$$

Cada uma destas $\binom{n}{2}$ correlações dando origem a tantas correlações de ordem 1, quantas são as variáveis que nela não figuram, ou seja, $n-2$, o número total de correlações de ordem 1 será:

$$\binom{n}{2} (n-2) = \binom{n}{2} \binom{n-2}{1}$$

Da mesma maneira, cada uma das $\binom{n}{2}$ correlações de ordem 0 dando origem a tantas correlações de ordem 2, quantas são as combinações, duas a duas, das variáveis restantes, temos que o número total de correlações de ordem 2 será:

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$

Raciocinando-se de forma idêntica às anteriores, para o caso geral do número de correlações de ordem p, podemos estabelecer como expressão geral do número de correlações de uma ordem qualquer:

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{p}$$

V

NÚMERO TOTAL DE CORRELAÇÕES, NO CASO DE n VARIÁVEIS

$$\binom{n}{2}\sum_{p=0}^{n-2}\binom{n-2}{p} = \binom{n}{2}\,2^{n-2}$$

VI

NÚMERO DE CORRELAÇÕES PARCIAIS, NO CASO DE n VARIÁVEIS

$$\binom{n}{2}\,2^{n-2} - \binom{n}{2} = \binom{n}{2}\left(2^{n-2} - 1\right)$$

VII

NÚMERO DE REGRESSÕES DE ORDEM p, NO CASO DE n VARIÁVEIS

Este número vale o duplo do número de correlações de ordem p, ou seja:

$$2\binom{n}{2}\binom{n-2}{p} = D_{n,2}\binom{n-2}{p}$$

No caso particular de $p = n - 2$, o número de regressões será: $n\,(n-1)$.

VIII

NÚMERO TOTAL DE REGRESSÕES, NO CASO DE n VARIÁVEIS

$$2\binom{n}{2}2^{n-2} = \binom{n}{2}2^{n-1} = D_{n,2}\cdot 2^{n-2}$$

IX

NÚMERO DE REGRESSÕES PARCIAIS, NO CASO DE n VARIÁVEIS

$$2\binom{n}{2}\left(2^{n-2}-1\right) = D_{n,2}\left(2^{n-2}-1\right)$$

* * *

Os diversos resultados que vimos de apresentar oferecem não só um interesse teórico, como tambem permitem um contrôle, afim de serem evitadas omissões, ao se tratar com grande número de atributos ou variáveis; prestam-se, além disso, para se avaliar, de antemão, a extensão do trabalho a ser realizado.