discurso (35), 2005: 167-216

O elemento diferencial de tempo e a causalidade física na dinâmica de D'Alembert*

Michel Paty**

Resumo: Em sua concepção da dinâmica como ciência das mudanças dos movimentos dos corpos, D'Alembert propõe-se a exprimir estas mudanças somente em função das grandezas do movimento. Ele estabelece assim a possibilidade de concebê-las fisicamente, em relação às suas causas efetivas, sem recorrer a conceitos externos como o de força, afirmando a co-naturalidade da causa física et de seus efeitos, traduzida pela noção de aceleração instantânea, cuja significação física vincula-se à forma diferencial da grandeza *tempo* e ao conceito de movimento virtual. Esta construção de uma causalidade temporal física e o uso correlativo da análise diferencial, para pensar e relacionar entre si as grandezas do movimento, permitem-lhe enunciar as leis gerais do movimento na forma de *princípios* e reorganizar conceitualmente a mecânica newtoniana. Desde então, a lei fundamental da dinâmica não mais será a segunda lei de Newton, mas sim o " princípio da dinâmica " formulado para sistemas quaisquer de corpos em interação, conseqüência e síntese dos três princípios fundadores. Com isso, era dado o impulso a uma *matematização* total da mecânica, tornando ao mesmo tempo mais explícito o caráter *físico* dessa ciência. Neste trabalho, nós insistimos nos aspectos que se referem à *conceptualização (conceituação] física* tornada possí-

* Publicado originalmente em francês sob o título de "L'élément différentiel de temps et la causalité physique dans la dynamique de D'Alembert". In Morelon, R. & Hasnawi, A. (eds.), *De Zénon d'Elée à Poincaré. Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed.* Louvain, Peeters, 2004, p. 391-426. Trad. de Maria Aparecida Corrêa.

** Professor na Universidade de Paris 7-Denis Diderot, pesquisador da Équipe REHSEIS (UMR 7596) e do CNRS, e professor convidado do Departamento de Filosofia da USP.

vel pela análise, no que se refere principalmente ao tempo, à aceleração e às grandezas derivadas assim como às particularidades conceituais devidas à sua representação geométrica.
Palavras-chave: dinâmica – movimento dos corpos – matematização da mecânica – conceptualização da física

1. Introdução. Sobre a formulação da "causalidade diferencial por D'Alembert"

Os trabalhos dos primeiros "continuadores continentais" de Isaac Newton, como Leonhard Euler, Alexis Clairaut e Jean Le Rond D'Alembert, são considerados geralmente como uma retomada da física newtoniana em "estilo analítico". Mas apenas em parte isso é verdade. Certamente, suas obras situam-se na junção dos *Principia* de Newton e, sobretudo, do "Système du monde" do Livro 3 e do cálculo diferencial simbólico de Gottfried Wilhelm Leibniz, já empregado por este último e seus discípulos (os irmãos Johann et Jacob Bernoulli de Basiléia, Pierre Varignon, etc.), em problemas de trajetórias mecânicas de pontos materiais pesados; a eles coube desenvolver, aprofundar essa abordagem analítica e estendê-la ao conjunto dos problemas da mecânica e da astronomia. Mas os respectivos projetos (e as realizações) de cada um destes *"savants géomètres"* ("sábios geômetras) podem ser igualmente considerados como alternativas à perspectiva newtoniana, tanto no que se refere aos fundamentos de suas concepções da física e da mecânica, quanto à forma e ao sentido dados às proposições dessas ciências, à escolha de seus princípios, às relações de suas grandezas; portanto, a seus conteúdos conceituais.

Desse modo, a dinâmica, para D'Alembert, como foi exposta e empregada em suas diferentes obras e em primeiro lugar no seu *Traité de dynamique* publicado em 1743 (D'Alembert 1), apresenta-se como uma reorganização conceitual e teórica da mecânica newtoniana (Paty 59, p. 19-64; *idem* 62; Grimberg & Paty 36; Michel & Paty 42). As "leis ou axiomas do

movimento dos corpos" de Newton são transformadas nessa obra em *princípios* do *movimento,* originários ou fundadores, tendo sido concebidos ao mesmo tempo como leis gerais da natureza, que regem as relações entre as grandezas utilizadas para descrever o movimento. Nesta, são tomados em consideração apenas os *movimentos,* sendo excluída qualquer noção ou grandeza externa, como as *forças,* entendidas no sentido de "potências", ou as *causas,* entendidas como naturezas "metafísicas" (e de conteúdo obscuro). Se a lei da inércia é retomada sem modificação, sob a denominação de princípio "da força de inércia" (D'Alembert 1, 1ª ed., p. xii, xiv, xv, p. 3, etc.; 2ª ed., 1758, p. xi, xii, xv, p. 3, etc.)(1), a segunda lei de Newton, segundo a qual a "mudança de movimento" é proporcional à "força imprimida", é substituída por um "princípio da composição dos movimentos"; enquanto a terceira, a da ação e da reação, torna-se "princípio do equilíbrio". Isso não quer dizer que as noções de "causa" e de "força" não estejam presentes na dinâmica de D'Alembert, na medida em que ele concebe efetivamente que as mudanças de movimento estão a elas relacionadas, já que estas não podem provir dos próprios corpos(2), mas tais noções são exatamente circunscritas pela dinâmica, referidas aos efeitos que elas induzem em termos de movimento, e "apenas de movimento". Ou, em outros termos, a *causalidade no sentido físico,* devido à ação das forças, é considerada como *co-extensiva aos seus efeitos.*

Essa reorganização interna de uma "ciência do movimento" tornou-se possível pelo emprego sistemático da análise não somente para o cálculo, mas para o próprio *pensamento* das grandezas e dos princípios do movimento, em particular pela expressão das variações das grandezas em termos de elementos diferenciais. As *grandezas físicas* utilizadas para descrever o movimento e suscetíveis de fornecer, graças às suas relações (na forma de equações), as leis particulares dos movimentos mais diversos, aí são concebidas *na sua significação física* por meio de sua *expressão matemática,* a de *variáveis contínuas e diferenciáveis.* O caráter sistemático da maneira de pensar as grandezas da mecânica consideradas segundo sua forma matemática (geométrica e algébrica) e, mais precisamente, diferencial e integral não é o aspecto menos importante da originalidade característica da obra de

D'Alembert. Esta forma de pensar impregna, sem terminologia e de maneira, por assim dizer, silenciosa, os três primeiros capítulos do *Tratado de dinâmica (Traité de dynamique),* que estabelecem os princípios fundadores da ciência do movimento, definem os conceitos e grandezas próprias a este último, e asseguram as condições de relacioná-los. Esta forma de pensar, preparada de tal modo, frutifica no restante da obra, em que o tratamento analítico dos problemas mecânicos resulta do dispositivo das considerações iniciais sem necessitar de outra justificação senão a da solidariedade constituída entre o princípio unificador da dinâmica (o "princípio de D'Alembert") e a expressão analítica das grandezas do movimento.

Ao mesmo tempo, esta reorganização e sua operacionalização assegurava o programa de uma matematização completa da mecânica. Primeiramente, estabelecendo a possibilidade de conceber um tal programa, pela exposição detalhada dos princípios do movimento, de sua significação e de suas implicações, de que se ocupa a primeira parte do *Traité de dynamique.* Em seguida, pela sua própria aplicação com o auxílio do "princípio da dinâmica", dito "princípio de D'Alembert", sendo este mesmo a conseqüência e síntese dos três "princípios fundadores" enunciados e argumentados em primeiro lugar (em relação a isso, *teorema* mais do que *princípio* propriamente dito), o que permitia (de direito ou em matéria de princípio) transcrever em equações todos os problemas de movimento dos mais diversos corpos que pudessem ser considerados.

Entre as grandezas que descrevem o movimento, figura, em primeiro lugar, com o *espaço,* o *tempo* como variável fundamental em função da qual se exprimem em geral as variações de todas as grandezas do movimento, cujo estudo é objeto da *dinâmica.* O tempo tem efetivamente um papel muito particular na reorganização conceitual efetuada por D'Alembert, e o presente trabalho tenta explicitá-lo. Nós veremos como a *significação diferencial* da *grandeza tempo* lhe é essencial para a conceituação precisa de uma *causalidade física* que se exprime nas leis do movimento referidas à forma analítica de equações entre as grandezas que servem para descrever este último. A forma analítica da grandeza temporal *(t* e *dt),* que resolve matematicamente a oposição originária entre a singularidade do "instantâneo" e a continuidade do fluxo da duração (oposição que vale tanto para o movimento quanto para o tempo), é, com efeito, diretamente ligada à questão da *modalidade* segundo a qual se efetua a continuação ou a mudança do movimento nos corpos *físicos.*

D'Alembert dá início, a esse respeito, a uma maneira de pensar os fenômenos do movimento que é, ao mesmo tempo e de modo explícito, *física e analítica.* Com a *impenetrabilidade* dos corpos, que possibilita conceber estes últimos como distintos da *extensão* que eles ocupam, o *tempo* é o que faz o caráter *físico* do movimento, e o que distingue os deslocamentos efetivos dos corpos daqueles (puramente intelectuais) das figuras da geometria. O problema geral mais importante da dinâmica sendo o das *mudanças* do movimento, a aceleração "instantânea" adquirida durante o elemento diferencial de tempo aparece como um conceito gerador, permitindo exprimir na totalidade o que "a causa da mudança" tem de físico. Para esta *construção física* da função do tempo na dinâmica, a *representação geométrica* era necessária a D'Alembert, que pensava a mecânica como uma "geometria no tempo" e até como uma "geometria em quatro dimensões". Mas ela era-lhe igualmente necessária para assegurar às grandezas e às suas diferenciais, além de seu caráter físico, um fundamento racional, na mesma linha das "primeiras e últimas razões" dos *Principia* de Newton, retomadas aqui, e de acordo com um pensamento operatório explícito da noção de limite.

Conseqüentemente, uma idéia fundamental, introduzida por Newton, sem no entanto ter recebido uma formulação precisa e quantitativa, a da *ação* ou de *mudança, instântanea* com a o caráter *instantâneo do tempo,* podia encontrar sua expressão direta e sua significação do ponto de vista físico, tendo efeitos na transcrição dos problemas considerados.

Mais tarde, toda a mecânica, e até mesmo toda a física(3), seria referida à "causalidade diferencial" e, em particular, temporal, como a seu eixo central. Fica evidente que as concepções de D'Alembert deram um grande passo neste sentido. Faltará em seguida se interrogar sobre a posteridade efetiva desse programa, levando-se também em conta a importância de concepções concorrentes, como as de Euler, que deu à mecânica uma formulação centrada na força, no sentido newtoniano do termo. Na obra de Lagrange, pode-se acompanhar a continuação ou mudança de orientação do programa conceitual de D'Alembert: sobre isso nós proporemos alguns elementos no decorrer deste estudo.

2. A dinâmica e a inteligibilidade do movimento pela análise

No *Discurso preliminar da Enciclopédia (Discours préliminaire de l'Encyclopédie),* de 1751, e no *Ensaio sobre os elementos de filosofia (Essai sur les eléménts de philosophie),* de 1758, obras estas filosóficas, a ciência do movimento dos corpos aí tratada é a mecânica, situada, logo de início, entre as "ciências matemáticas" (de fato, "físico-matemáticas"). Nestes textos, ela é abordada segundo a ordem "genética" dos conhecimentos, em que a inteligibilidade de uma ciência refere-se ao grau de abstração e de simplicidade (e de generalidade) de seus objetos, isto é, as ciências cujos objetos são mais complexos podendo beneficiar-se da "aplicação" daquelas cujos objetos são mais simples e de caráter mais abstrato. A "aplicação" de uma das disciplinas das matemáticas a uma outra justifica-se pela operação de abstração pelo *pensamento* de seus objetos que as refere às grandezas matemáticas próprias ao nível superior de generalidade. É deste modo que a geometria, esta "ciência das propriedades da extensão", beneficia-se da aplicação da álgebra e da análise (no sentido do cálculo infinitesimal que concerne às grandezas contínuas), tratando das relações das partes da extensão entre si, de tal maneira que "a análise algébrica [...] é a teoria das curvas" (D'Alembert 8, Cap. 15, p. 304; *idem* 9; *idem* 10, Vol. 5; *idem* 9, Ecl. 13, p. 341-5). E a mecânica, ciência do movimento dos corpos no espaço e no tempo, é ela mesma suscetível da aplicação da geometria; portanto, de ser tratada pelos meios da análise. Com efeito, as grandezas da mecânica que têm por objeto a extensão espacial podem ser constituídas a partir das grandezas da geometria, embora elas digam respeito ao mundo natural dos corpos físicos. A diferença entre a mecânica e a geometria consiste no fato de as grandezas geométricas serem *função do tempo:* a mecânica, escreve D'Alembert, por outro lado, é geometria no tempo(4). Posteriormente, em

seus *"Esclarecimentos sobre o espaço e o tempo" (Eclaircissements sur l'espace et le temps,* D'Alembert 9, p. 402 e ss.), D'Alembert enfatizará que o *espaço* e o *tempo* são concebidos independentemente dos corpos, ainda que ao mesmo tempo só o possam ser pelos corpos (o que lembra o processo de abstração que os constitui enquanto grandezas), e que a ligação entre essas idéias tão diferentes efetua-se pelo movimento, enquanto *grandezas* (o que dá precisão à especificidade do vínculo entre elas). D'Alembert indica como o próprio tempo pode ser geometrizado, por se relacionar "naturalmente" com o movimento uniforme; por outro lado, o diagrama da variação do espaço em função do tempo, apresentado no *Traité de dynamique,* corresponde a uma espécie de homogeneização matemática destas grandezas físicas, sem que, por isso, a diferença de natureza entre elas seja omitida, se suas relações preservam suas respectivas unidades (D'Alembert 1, 1ª ed., Pref., p. vii-viii)(5).

Nós voltaremos mais adiante a tratar das grandezas analíticas da mecânica, para mostrar como a análise representa, no trabalho de D'Alembert, tanto para a mecânica quanto para a geometria, muito mais do que uma simples "aplicação" de uma ciência mais abstrata: uma maneira de pensar estas duas ciências, *um verdadeiro pensamento sobre suas grandezas e suas recíprocas* relações(6). Mais precisamente, nós veremos qual é o papel conceitual desempenhado pela análise nessa forma de pensar o movimento.

Até aqui se poderia falar em programa de inteligibilidade cartesiano. De fato, as idéias de D'Alembert sobre a expressão matemática das grandezas da mecânica (e até, por extensão, da física em algumas de suas partes) são claramente de inspiração cartesiana, muito mais do que newtoniana(7). É pela natureza de nosso conhecimento que somos levados a utilizar as matemáticas em certos domínios de objetos, e não porque o próprio mundo seria de natureza matemática e no mesmo nível das grandezas que o descrevem, "verdadeiras e matemáticas", em oposição às grandezas "aparentes ou sensíveis", segundo as concepções neoplatônicas de Newton. Uma outra filosofia do conhecimento acompanha, no século XVIII, no círculo dos sábios geômetras do continente, a nova via para a mecânica, reconhecida por eles na seqüência dos *Principia* de Newton, e esta filosofia é preferencialmente tributária da concepção cartesiana de inteligibilidade, no que se refere em particular ao estatuto das grandezas (Paty 60, p. 19-64; *idem* 61, p. 247-86).

A mecânica é uma ciência "matemática" de um gênero particular, já que suas grandezas, por mais abstratas que sejam, permitem descrever os fenômenos do mundo físico, sem que esse próprio mundo seja concebido idealmente. Ela representa, de fato, para D'Alembert, um meio-termo entre a racionalidade das matemáticas e a de outras ciências, e o método de abstração e de aplicação de conhecimentos mais abstratos é geral[(8)]. Com efeito, a mecânica comporta proposições que nem sempre podem ser imediatamente reduzidas apenas à evidência racional. Tal é, em primeiro lugar, a dependência do movimento em relação ao tempo (a este respeito, a idéia de uma "medida natural do tempo" supõe que o próprio tempo seja físico). Tais são igualmente certas propriedades dos corpos que condicionam o movimento e provocam suas mudanças: a *impenetrabilidade,* que faz a distinção entre um corpo e a *extensão* que ele ocupa e que origina o impulso por choques, ou a *atração,* que é um fato geral constatado, mas irredutível ao impulso[(9)].

Entretanto, apesar dessas características que a tornam uma ciência do mundo físico, a mecânca é entre essas ciências a que permite elevar a seu mais alto grau, isto é, à imagem das próprias matemáticas, a exigência de racionalidade. É possível, com efeito, como prescreve D'Alembert de uma maneira geral, "nela introduzir e aplicar, tanto quanto se puder, conhecimentos encontrados nas ciências mais abstratas e, conseqüentemente, mais simples", e estas são essencialmente, para a mecânica, a geometria e a análise. Mas ainda é necessário "considerar, da maneira mais abstrata e mais simples possível, o objeto particular desta ciência; nada supondo, nada admitindo neste objeto, além das propriedades supostas pela própria ciência de que tratamos". Atender a esta exigência, isto é, tornar a mecânica mais inteligível e alargar seu campo[(10)], fundando-a em princípios bem escolhidos e fecundos, matematizando-a, é precisamente o programa que D'Alembert se fixou desde seu *Traité de dynamique.* Tratava-se de conceber o objeto da mecânica da maneira mais inteligível possível, e de formular as grandezas apropriadas e os princípios fundadores. O maior problema encontrado num tal projeto era o de exprimir as mudanças de movimentos, provocadas por causas variadas, desfazendo-se simultaneamente da obscuridade vinculada a noções como as de *causa,* precisamente, ou de *força,* que nada mais é do que uma transcrição da primeira.

"Eu desviei meu olhar das causas motoras", afirma D'Alembert no prefácio do *Traité de dynamique,* enunciando seu projeto de ater-se apenas à consideração do movimento (e, logo, de suas grandezas, formadas a partir do espaço, e funções do tempo, geométricas e analíticas) e rejeitar o recurso a forças que seriam exteriores ao movimento, "seres obscuros e metafísicos", inúteis para o conhecimento. Segundo este programa, as únicas noções de força aceitáveis para a mecânica seriam as de forças derivadas das grandezas que descrevem o movimento: as *forças aceleradoras* e *motoras,* respectivamente definidas como a aceleração e como a massa multiplicada pela aceleração. D'Alembert definia a *dinâmica* (termo retomado de Leibniz) como a "ciência do movimento dos corpos que agem uns sobre os outros de uma maneira qualquer" (D'Alembert 1, Pref. p. xvi, xxiii)[(11)], isto é, não mais como a ciência das forças ou das potências, mas como a ciência da manifestação dos *efeitos* dessas forças, concebidos da maneira mais geral. A dinâmica tornava-se, assim, o objeto de uma reconfiguração de sentido, desembaraçando-se de toda carga "metafísica" e, ao mesmo tempo, de todo conteúdo conceitual que escaparia da apreensão da representação pela análise.

Referindo-se à ação mútua dos corpos "de uma maneira qualquer", por um lado, D'Alembert tinha em vista a diversidade dos modos dessa ação, que tanto poderia ser o impulso pelo contato quanto a atração à distância; e, por outro lado, as modalidades das repercussões dessa ação, para corpos ligados entre si, de configurações complexas (como, por exemplo, o pêndulo composto).

Seu propósito, que atravessa todo o *Traité de dynamique,* determinando toda a estrutura da obra, era tratar do movimento, atendo-se apenas à consideração de suas variáveis, a saber, os espaços percorridos, os tempos gastos para percorrê-los, as velocidades, as acelerações e qualquer outra função formada a partir das primeiras, sem recorrer de maneira alguma às "forças", isto é, sem tentar entrar nas *causas* que provocam as mudanças de movimento. O que não quer dizer que D'Alembert ignorasse essas causas, já que na natureza há mudanças de movimento, e que o objeto da dinâmica é precisamente descrevê-las e enunciar-lhes a lei: ele queria circunscrever a descrição das mudanças (devidas a causas) ao que se pode delas dizer, isto é, à constatação de seus efeitos em termos de mudança do movimento. Estes efeitos inscrevem-se nas leis particulares do movimento, locais e instantâneas, isto é, na equação diferencial que determina a trajetória(12).

Esse aspecto da causalidade, que, em outros termos, é a escritura de uma equação diferencial, é de alguma forma a *causalidade no sentido puramente físico* tal qual D'Alembert o compreende; embora ele não empregue expressamente este termo, de uso posterior, deve-se constatar que a idéia de uma tal *causalidade física* é efetiva em seu pensamento. De alguma maneira, a *causa física é conhecida pelos seus efeitos, que lhe são simultâneos,* no mesmo instante em que eles se manifestam (nós veremos as conseqüências conceituais consideráveis desta postulação), e este conhecimento abrange tudo o que a causalidade comporta e que nos seja acessível e concebível; portanto, é o único aspecto da causalidade que se deve levar em consideração, qualquer outro perdendo-se nas obscuridades "metafísicas"(13). A *causalidade física,* diferentemente da *causalidade metafísica,* é passível de conhecimento por exprimir a *identidade efetiva* (que nós poderíamos dizer *prática,* ou ainda *fenomenal)* da causa com seu efeito, desde o instante mesmo do começo de sua aplicação. Daí a importância de levar em conta *a efetividade,* na duração do tempo (e na duração imediata atada ao instante) *desta causa,* com veremos de maneira mais precisa.

Por essa razão, considerando-se seu projeto, no *pensamento* da mecânica de D'Alembert, o movimento é tratado *em si mesmo,* por assim dizer, de maneira *interna,* somente pela utilização das grandezas *cinemáticas,* expressas matematicamente (pela geometria e pela análise); portanto, de forma totalmente matematizada. Ao menos lhe será necessário, para isso, ter a possibilidade de exprimir essas grandezas e suas relações. As primeiras, enquanto grandezas contínuas, são pensadas por meio de sua expressão dada pelo cálculo diferencial. As segundas, as relações das grandezas, requerem o conhecimento dos princípios físicos ou leis gerais do domínio considerado.

O que acabamos de dizer não significa de maneira alguma, é claro, que a mecânica de D'Alembert se reduziria a uma *cinématica,* em oposição ao significado usual de *dinâmica:* ela é uma *dinâmica* de fato, já que os movimentos são submetidos a *mudanças,* que podem ser *identificadas* pelos efeitos constatados. Ela tem a ver, portanto, com as propriedades que originam estas mudanças, a saber, que os corpos são impenetráveis, têm uma massa e possuem a capacidade de atração, isto é, o que lhes dá um carater *físico:* "Como o Movimento de um Corpo chega a seguir tal ou tal lei particular? Sobre isso a geometria sozinha não pode nos ensinar nada, e é isso também que pode ser visto como o primeiro Problema que pertence imediatamente à Mechanica" (D'Alembert 1, 1ª ed., Pref., p. viii)(14).

Temos de precisar como a "aplicação" da análise à mecânica corresponde de fato, na elaboração de D'Alembert, a um "pensamento diferencial" das grandezas desta ciência, antes de abordar suas implicações do ponto de vista do conhecimento dos fenômenos físicos. Para D'Alembert, de modo geral, um elemento diferencial *(dA)* é concebido de maneira homogênea à grandeza *(A)* que o engendra, com a qual ele pode entrar em composição, por adição ou subtração, em grandeza e direção, segundo as três dimensões espaciais (isto é, de fato, vetorialmente)(15). E, no entanto, ele pode, a rigor, somente ter uma significação simbólica, já que não pode ser um número finito, ou ser nulo. Ele é, com efeito, definido pela derivada da grandeza em relação à variável: $dA = A'(x)\,dx$, só a derivada $A'(x)$ sendo uma quantidade finita, limite da razão da diferença *(DA)* entre os valores da grandeza *A* à diferença (*Dx*) dos valores correspondentes da variável *x,* quando estas diferenças tendem a zero ($\frac{\Delta A}{\Delta x} \rightarrow \frac{dA}{dx} = A'$). A significação de um elemento diferencial lhe é dada não pela atribuição de um valor numérico, mas por uma *operação* de passagem a limite. Tudo se passa como se a gente pudesse pensar o elemento diferencial como um número, sem que ele tenha o valor de um número e sem por isso ser tributário de noções vagas como a de infinito ou a de infinitesimal. Aliás, existem outros exemplos, com os quais estava-se familiarizado na época de D'Alembert, de grandezas definidas por outras operações de passagens a limite, e entre os próprios números: as "relações incomensuráveis" (os números irracionais), irredutíveis a números exatos que só podem ser concebidos pela operação de uma seqüência infinita de relações de números racionais e de sua passagem a limite, e que, para o resto, obedecem às mesmas propriedades que os números ordinários, inteiros ou fracionários ("rompidos")[16].

Para D'Alembert, a noção de passagem a limite, que implica a idéia de infinito, evita de fato a idéia de infinito no sentido atual, porque ela leva a termos finitos. Ela é subtendida por uma representação geométrica: o que vale tanto para as relações incomensuráveis (ou números irracionais), que são *finitos geometricamente,* por exemplo, a diagonal de um quadrado, quanto para as derivadas (limites finitos da razão de duas quantidades infinitesimais). D'Alembert, por sua vez, retomou a forma leibniziana da grandeza diferencial, de utilização imediata, manejável e fecunda nos cálculos, dando-lhe o conteúdo e a justificação da *fluxion* newtoniana (Paty 52, p. 205-15; *idem* 63), ou, para ser exato, da geometria dos limites, desenvolvida por Newton no Livro I dos *Principia,* em vista precisamente dos problemas da mecânica. O que ele expõe claramente, por exemplo, no artigo "Diferencial" da *Enciclopédia (l'Encyclopédie):* "Ele [Newton] nunca considerou o cálculo diferencial como o cálculo das quantidades infinitamente pequenas, mas como o método das primeiras e últimas razões, isto é, o método de encontrar os limites das razões". D'Alembert tem particularmente razão a este respeito, pois Newton utilizou, precisamente, nos *Principia,* não seu cálculo das fluxões propriamente dito, tal qual o elaborou, em que intervêm "momentos" infinitesimais que são problemáticos para a inteligibilidade, mas o "método das primeiras e últimas razões das grandezas", que é uma geometria dos limites equivalente ao cálculo das fluxões, porém mais bem fundamentada que aquele, precisamente por seu recurso à noção de limite[17]. Para D'Alembert, a utilização das diferenciais é desde então perfeitamente justificada com esta significação, que é perfeitamente compreensível pela familiarização com o cálculo (D'Alembert & Diderot 13, Vol. 4, p. 985-9).

Ele podia então utlizar de maneira formal esse elemento como se se tratasse de uma grandeza da mesma natureza que a grandeza geratriz. Este pensamento operatório ultrapassa de fato a forma para alcançar o conteúdo:

o elemento diferencial é pensado segundo um conteúdo homogêneo ao da grandeza de que ele é a diferença: *dA* é uma grandeza (por meio do apelo à sua definição pelo limite, que proíbe ver nesta uma quantidade finita) da mesma natureza que *A,* e pode ser composta com esta. A particularidade das grandezas da mecânica, que servem para descrever os movimentos, isto é, os deslocamentos na extensão espacial no transcorrer do tempo, é que suas derivadas são formadas em relação ao tempo tomado como variável, o que dá uma significação precisa aos elementos diferenciais das diversas grandezas: se $e(t)$ é uma distância percorrida, considerada no tempo t, de é o elemento diferencial de e definido pela velocidade instantânea $v(t)$: $de = v(t)dt$; de é homogêneo a e, e a diferencial segunda, d^2e, também o é, definida por sua vez pela aceleração instantânea ($\frac{d^2e}{dt^2}$). Este uso, proposto por D'Alembert, tem aplicação imediata na mecânica e permite-lhe exprimir, sem recorrer às causas nem às forças, o problema geral da dinâmica, que é o das mudanças de movimento.

Esse pensamento diferencial das grandezas físicas corresponde a uma transformação decisiva na concepção da mecânica, e mais geralmente da física, como ciência, determinando o movimento irreversível de sua matematização, que se efetuaria, como D'Alembert tinha bem visto, sob a legislação de princípios físicos próprios a cada domínio. Quanto à razão desta matematização, ela seria justamente dada, em cada caso, pela escolha dos princípios físicos adequados, formulados racionalmente, que, por via de conseqüência, conduz às relações (ou razões) entre as grandezas consideradas, deduzidas de sua expressão matemática. Esta concepção racional das grandezas e dos princípios de uma ciência fisica está próxima e sem dúvida alguma é tributária das considerações expostas por Descartes nas *Regras para a direção do espírito (Règles pour la direction de l'esprit)* (sem as restrições ulteriores de sua concepção puramente geométrica da física, exposta principalmente em sua obra *Princípios da filosofia (Principes de la philosophie)* (Descartes 23, p. 348-9; *idem* 25; *idem* 26; Paty 61, p. 247-86).

3. *Crítica da segunda lei de newton e construção das grandezas do movimento*

Na dinâmica de D'Alembert, a lei fundamental da dinâmica não podia mais ser a segunda lei de Newton, que enuncia a proporcionalidade entre a mudança de movimento e a "força motriz imprimida" (Newton 49, Vol. 1, Livro 1)[18]. As três leis de Newton aí são substituídas, tínhamos dito, por três *princípios do movimento,* princípios originários ou fundadores, de onde é excluída qualquer noção externa como a de causa ou a de força. A segunda lei de Newton, que pode ser lida $F = \Delta(mv) = m\Delta v$, comportava uma ambigüidade dimensional, que se pode vincular à dificuldade para Newton de conceber um "momento de tempo". Ela só recebeu sua expressão diferencial, sob a qual ela se manteve ( ), em 1750, em um trabalho de Euler[19]. Esta fórmula tem a significação de uma equação entre dois termos que são definidos de maneira independente: de um lado, F representa a força imprimida ao corpo, exterior a ele; de outro, m é a massa deste corpo e $\frac{d^2x}{dt^2}$ a aceleração deste último no instante considerado[20].

D'Alembert também faz figurar a aceleração numa fórmula que dá conta da mudança de movimento, já nas primeiras páginas do *Traité de dynamique,* quando, a propósito do movimento uniforme, ele evoca o movimento variado, mas num sentido muito diferente. Ele constrói passo a passo a relação que permite passar do movimento uniforme ao movimento acelerado ou retardado, apoiando-se na representação gráfica a duas dimensões dos espaços e dos tempos, na qual um dos eixos (o eixo vertical) figura um movimento uniforme de referência que corresponde aos tempos, *t;* o outro eixo (horizontal) figurando os espaços percorridos correspondentes, *e* sendo a variável de posição. Um movimento uniforme dado corresponde a uma reta oblíqua em relação ao primeiro eixo; um movimento não uniforme, ou variado, é caracterizado por uma relação não linear dos espaços e dos tempos, sua representação é, portanto, uma curva, $e = e\ (t)$, convexa ou côncava, segundo a natureza do movimento, acelerado ou retardado. Pelo estudo

dessa curva, D'Alembert define as grandezas que caracterizam um movimento variado, a saber, a velocidade, a aceleração e as outras grandezas derivadas. Em um tal estudo, não é necessário estender-se sobre a causa da variação do movimento: basta saber que "esta variação contínua só pode provir de alguma causa externa que age sem parar ...".

A definição da *velocidade instantânea* no instante t tal como a propõe D'Alembert faz intervir ao mesmo tempo o *elemento diferencial* da variável de espaço, *de,* concebido para uma unidade de tempo, sendo esta última igual a *dt* (nós trataremos mais adiante dos problemas conceituais postos pelo elemento diferencial de tempo, *dt),* e aqui suposta constante com o tempo; e a noção de *velocidade virtual,* ou tendencial, ainda que esta não tenha sido mencionada nominalmente nesta passagem (nós retomaremos este ponto também). Com efeito, se a velocidade muda a cada instante, indica, "concebe-se somente que sua expressão *para um instante dado* deve ser a mesma que ela seria, se neste instante o movimento cessasse de ser acelerado ou retardado". A significação da velocidade instantânea é, portanto, a de ser uma velocidade uniforme durante o elemento de duração *dt,* com o valor e a direção que o movimento tinha até este instante: ela é tomada sobre a tangente à curva do diagrama *(e = e (t)):* a velocidade é definida como $u = \frac{de}{dt}$ (D'Alembert 1, 1ª parte, Cap. 1, art. 14, p. 13-4; sublinhado por mim).

Da mesma forma, D'Alembert *constrói a aceleração* (fazendo abstração da velocidade), tomando em consideração o movimento (virtual ou tendencial), que é o efeito da causa da mudança de movimento, e os espaços percorridos correspondentes: estes "seriam aqueles que a *causa aceleradora (de aceleração)* faria o corpo percorrer nos instantes [considerados] se no início desses instantes não houvesse nenhuma velocidade" *(id., ibid.,* 1ª parte, Cap. 1, art. 15 e 16, p. 14-6; sublinhado por D'Alembert)[21]. Em seu raciocínio, D'Alembert avalia as razões de espaços percorridos maiores ou menores em relação ao movimento uniforme (pela distância sobre o eixo dos espaços percorridos, para o ponto corrente no tempo *t,* entre a curva e a tangente). A aproximação ao ponto considerado da curva pelo círculo tangente fornece-lhe a relação de proporcionalidade entre o elemento diferencial de segunda ordem de espaço *(dde)* e o quadrado do elemento de tempo (dt^2)*(id., ibid.,* 1ª parte, Cap. 1, art. 15, p. 14-5)[22]. Notemos aqui que sua construção, efetuada sobre um diagrama geral dos espaços e dos tempos vale para qualquer movimento variado.

No fim das contas, "os espaços percorridos por um corpo em virtude de uma potência aceleradora qualquer são no início do movimento como os quadrados do tempo", e a "equação *différentio-différentielle"* (isto é, a equação diferencial de segunda ordem) da curva é escrita , em que *j* exprime "uma função qualquer de *e* e de *t,* ou mesmo dessas grandezas e de suas diferenças" (D'Alembert 1, 1ª parte, Cap. 1, art. 17, p. 16)[23]. Esta equação diferencial da curva permite *definir* a aceleração, a força aceleradora e a força motriz. D'Alembert define essas grandezas nos seguintes termos: "Assim nós entenderemos em geral por força motriz o produto da massa que se move pelo elemento de sua velocidade, ou o que é a mesma coisa pelo pequeno espaço que ela *percorreria* num instante dado em virtude da causa que acelera ou retarda seu movimento; por força aceleradora, nós entenderemos simplesmente o elemento da velocidade" *(id., ibid.,* 1ª parte, Cap. 1, art. 14, p. 19)[24]. No total, as definições das grandezas (instantâneas) do movimento são: a velocidade, $u=\frac{de}{dt}$; a força aceleradora (ou a aceleração), como "elemento de velocidade", $\varphi = \frac{du}{dt} = \frac{dde}{dt^2} \equiv \frac{d^2e}{dt^2}$; a força motriz, $m\varphi = m\frac{du}{dt} = m\frac{dde}{dt^2} \equiv m\frac{d^2e}{dt^2}$.

Essas relações são, portanto, de definição (da força aceleradora e da força motriz), e são sempre dadas, mesmo quando a causa da mudança de movimento é desconhecida. Elas não têm de maneira alguma a significação eulero-newtoniana de uma equação que iguala a mudança interna do movimento a uma força externa aplicada, ou, nos termos de D'Alembert, criticando as concepções de Daniel Bernoulli e de Euler, de uma equação que corresponderia a um princípio de proporcionalidade entre a causa e o efeito *(id., ibid.,* 1ª ed., 1ª parte, Cap. 1, art. 19, p. 18-20)[25]. Sua significação permanece interna ao movimento, dos quais elas nada mais fazem do que ex-

primir a mudança sofrida. Dando essas definições, D'Alembert situa-se na perspectiva de uma *continuidade* da mudança de movimento em relação ao estado de movimento uniforme retilíneo. Observemos que a relatividade do movimento está implícita na consideração das acelerações, na construção mesma (a aceleração não é afetada pela omissão do movimento uniforme no ponto de tangência da curva), e que ela provém da relatividade do espaço. D'Alembert, todavia, não a aponta nesta passagem.

A ação da causa manifesta-se, portanto, para D'Alembert (e é somente isso que importa) pelos efeitos que dela resultam, em termos das grandezas variáveis do movimento (posições, velocidades, acelerações, forças aceleradoras e motrices, etc.). E a identificação, por definição, da força à grandeza cinemática não faz, na verdade, nada mais do que exprimir a identificação da força a seu efeito no momento mesmo em que ela se aplica.

Pela elaboração de definições, formuladas a partir de um diagrama dos espaços e dos tempos que corresponde a uma espacialização do tempo e a uma geometrização conjunta dessas duas grandezas, D'Alembert enunciava as primeiras conseqüências de seu programa para uma dinâmica que só considera "o movimento e unicamente o movimento". O *princípio de inércia,* posto em primeiro lugar, estabelecia o movimento como naturalmente uniforme, o que permitia geometrizar o tempo, e definir os movimentos variados considerando os desvios em relação à uniformidade: construindo as *grandezas geométricas do movimento,* tanto do uniforme quanto do variado, utilizando *o pensamento diferencial* dessas grandezas. D'Alembert detinha a partir de então os meios para pensar o movimento e suas variações em termos de princípios originários do movimento, acrescentando ao princípio de inércia o princípio da composição do movimento e o de equílibrio. Em particular, a lei da composição das velocidades tem por corolário a utilização das acelerações: na mudança de movimento que ocorre a um dado instante *t,* as velocidades precedentemente adquiridas (em virtude do primeiro princípio, o da inércia) compõem-se (geometricamente) com os "elementos" (isto é, as diferenciais) das velocidades recebidas: pode-se escrever diretamente uma velocidade após sua variação (aumento ou diminuição), $v \pm dv$, tomado em grandeza e direção. Igualmente, o princípio de equílibrio é concebido como a anulação da velocidade total dos constituintes deste sistema (ou, mais exatamente, de sua quantidade de movimento), e permite dar corpo à noção de velocidade virtual, que pode ser compreendida como uma certa tendência, contrariada, ao movimento, e cujo elemento diferencial de velocidade constitui uma representação "intuitiva" que parece subtender as considerações efetivas de D'Alembert(26).

Portanto, é realmente o pensamento "analítico" (isto é, segundo os conceitos expressos por grandezas diferenciáveis) que permitiu a D'Alembert retomar a idéia das três "leis do movimento" de Newton, modificando sensivelmente sua formulação, e reorganizar sobre esta base a maneira de pensar a mecânica (Paty 52; *idem* 63). Tal é o significado da estruturação do *Traité de dynamique,* que enuncia primeiramente três *princípios originários* do movimento: "Podem-se reduzir todos os Princípios da Mecânica a três, à força da inércia, ao movimento composto, e ao equilíbrio" (D'Alembert 1, 1ª ed., p. 3; *id., ibid.,* Pref., p. xiv)(27). Aplicados a um sistema de corpos em interações quaisquer, estes princípios tomados conjuntamente permitem deduzir o teorema ou "princípio geral da dinâmica" ("princípio de D'Alembert"). Este último refere o estado de movimento do sistema a um estado de equlíbrio, tomando em conta as velocidades e elementos de qualquer ordem das diversas partes do sistema (velocidades adquiridas, velocidades virtuais devidas às ligações do sistema, velocidades adquiridas finalmente no movimento resultante, o que pode ser escrito: $v_a + v_l - v_{eff} = 0$). São, de fato, os impulsos ou "quantidades de movimento" (produtos das massas pelas velocidades para os diferentes corpos) que são tomados em conta. Pode-se obter assim a equação (diferencial) do movimento por aquela do equilíbrio, sem que se tenha feito de maneira alguma apelo a um conceito de força exterior.

Pelo menos, é essa a idéia da qual toda a obra quer ser a ilustração, ou mesmo a demonstração: "Espero fazer ver por este Tratado", precisa com efeito D'Alembert, "que toda esta ciência pode ser deduzida desses três princípios". Seu "princípio geral da dinâmica" ocupa aí um papel estratégico, sendo diretamente deduzido dos três princípios fundadores (de fato, do segundo e do terceiro), do qual ele constitui uma espécie de expressão sintética, com a vantagem de ser imediatamente aplicável a todo sistema de corpos sólidos, livres ou interligados, muito além dos meros sistemas simples de pontos materiais; portanto, de um vasto alcance, até mesmo no que se refere aos corpos celestes ligados entre si pela atração universal(28). Além do mais, o princípio era extensível, sob certas condições, ao caso dos fluidos e dos meios contínuos, como as obras ulteriores de D'Alembert sobre estas questões estabeleceriam, sobretudo com o cálculo às derivadas parciais (D'Alembert 2; *idem* 3; *idem* 6)(29).

4. O tempo como variável e sua diferencial

Ao afirmar o papel central do tempo como grandeza na constituição de sua dinâmica, D'Alembert inscrevia-se na tradição aberta por Galileu com a formulação da lei da queda dos corpos, em que os espaços percorridos (concebidos como distâncias finitas) são expressos *em função do tempo* (eles são como os quadrados dos tempos percorridos, concebidos como durações igualmente finitas, ou tempos médios)(30); Newton havia universalizado, em seguida, o papel do tempo na mecânica ao exprimir a lei geral das mudanças de movimento para um *instante* dado, resultando de forças às quais o móvel é submetido e cujo efeito se manifesta na obtenção de trajetórias por meio do estudo local de suas propriedades. No entanto, Newton apenas definia o tempo de maneira explícita como fluxo da duração; logo, por seu caráter contínuo, sem dar do *tempo instantâneo* outra conceptualização que a *operatória,* pela passagem a limite na direção do ponto considerado da trajetória e sua tangente.

A expressão mais clara e precisa do tempo instantâneo newtoniano encontra-se em uma passagem, no começo do Livro 1 dos *Principia,* da exposição de sua "geometria infinitesimal", ou geometria segundo o tempo, denominada por ele "método das primeiras e últimas razões das grandezas", quando estas grandezas "nascentes e evanescentes", tomadas sobre as trajetórias, e levadas em conta por suas relações (ou "razões", *ratio),* são consideradas no limite do movimento que as engendra ou as anula, "no instante mesmo" em que o movimento nasce ou cessa (nem um pouco antes nem um pouco depois) (Newton 49, Escólio do Lema 11, Vol. 1, p. 39)[(31)]. Newton ainda precisa: "Por última razão [ou relação] de grandezas evanescentes, deve-se entender a relação das grandezas não antes que elas desvaneçam, nem depois, mas com a qual elas desvanecem" *(id., ibid.,* Livro 1, Vol. 1, p. 39 da ed. Cajori)[(32)]. O valor finito dessa relação fixa exatamente o instante do "desvanecimento", isto é, de fato, o *tempo instantâneo* considerado correspondente à posição escolhida do móvel sobre sua trajetória. O tempo como grandeza, sendo somente operatório, não era objeto de uma representação explícita, nem geométrica, nem algébrica; os raciocínios sobre os intervalos de tempos iguais passavam pela tradução destes últimos em termos de arcos ou de cordas correspondentes tomadas sobre a trajetória.

As variações dessas grandezas consideradas em suas relações podiam ser expressas como relações de intervalos de tempo. Newton considerava um diagrama dos tempos e das velocidades (já usado pelos mestres escolásticos de Paris e de Oxford no século XIV ; Crombie 22; Clagett 20), a partir do qual ele calculava o espaço percorrido (produto da velocidade pelo tempo) pelo móvel sob o efeito da força, e concluía, por passagem a limite, que "os espaços descritos por um corpo solicitado por uma força finita qualquer, determinada e constante ou continuadamente aumentada ou diminuída, estão logo no comecinho do movimento na relação dos quadrados do tempo" (Newton 49, Livro 1, lemas 9 e 10, ed. Cajori, p. 34-35; trad. por mim). Ao fazer isso, ele retomava o raciocínio que conduzira Galileu à lei da queda dos corpos, tornando-o, todavia, mais geral, já que a força podia ser tanto constante quanto variável. Ao tornar sua esta mesma consideração para lhe dar uma forma algorítmica em termos de elementos diferenciais leibnizianos, Varignon a restringia ao caso "de uma força central constante e uniformemente aplicada", o que lhe permitia escrever a força aceleradora sob a forma $y = \frac{ddx}{dt^2}$ (Blay 16, p. 183-4). A expressão dt^2 tinha a significação de

um quadrado (enquanto *ddx* é uma diferencial de segunda ordem, daí a heterogeneidade da fórmula usual que permaneceu,).

Já D'Alembert definia a aceleração, como foi visto acima, a partir de uma representação gráfica geral dos espaços percorridos e dos tempos, o que é uma geometria abstrata, de pura construção do espaço e do tempo conjuntamente. Trata-se, observando bem, de uma audácia do pensamento, que ilustra sua idéia, expressa mais tarde no artigo "Dimension" da *Enciclopédia,* de que, de um certo modo, o tempo pode ser visto como uma quarta coordenada acrescentada às do espaço. Nesta geometria, ele fazia sua aproximação da curva de espaço e de tempo de equação *e(t)* pelo círculo tangente, obtendo diretamente para a aceleração a diferencial segunda da variável de espaço. Já o dt^2 que figura em sua fórmula provém da aproximação $\frac{d^2x}{dt^2}$ poligonal da curva com passagem a limite das tangentes, supondo que os elementos de tempo *dt* são constantes, enquanto o elemento do espaço considerado fica sendo "a diferença segunda do espaço percorrido" (D'Alembert 1, 1ª parte, Cap. 1, p. 15)[(33)].

D'Alembert fora mais longe do que Newton dando-se do tempo uma representação geométrica (graças à equivalência entre um movimento uniforme e uma linha dos tempos) e algébrica (pelo elemento diferencial). Mas como ele retomava a significação do elemento diferencial em geral, a de tempo em particular, do método das "primeiras e últimas razões das grandezas" de Newton e de seu conceito de limite, pode-se estranhar o fato de que ele não tenha reconhecido, na formulação de Newton, lembrada acima, a significação do tempo instantâneo e contínuo. Ele critica uma formulação muito próxima, retomada por vários autores a propósito das quantidades infinitesimais em geral (que o próprio Newton evitava, e é verdade que nesta não é questão do tempo e da mecânica), sem notar que sua origem encontra-se nos *Principia* e em um capítulo que tinha particular importância para ele[(34)]. Deve-se admitir que D'Alembert não reconhecia, neste tipo de formulação qualitativa e somente operatória, o conceito de tempo instantâneo apreendido na duração contínua que a análise permitia-lhe explicitar e empregar de uma maneira incomparavelmente mais precisa.

Se a representação geométrica e analítica do tempo trazia uma grande vantagem para a conceituação do tempo instantâneo, esta não deixava de apresentar um certo número de dificuldades que se manterão ainda durante muitos anos, como o demonstra a história dos inícios da "analitização" da mecânica. A dificuldade consistia em tornar o tempo uma grandeza no mesmo sentido que as outras grandezas da mecânica, já que por natureza ele escapa da representação espacial, mesmo se dele podemos ter uma tal representação privilegiando o movimento uniforme. Mas a dificuldade era também pensar o tempo como simultaneamente contínuo e instantâneo (singular) e, sobretudo, conceber exatamente sua relação com a ação que faz as mudanças de movimentos. O pensamento de D'Alembert é um testemunho dessas dificuldades, que ainda persistiam, apesar da representação do tempo como uma grandeza diferencial, e que permaneceriam até o tratamento completamente analítico dado à mecânica por Lagrange. Na *Mécanique analytique,* com efeito, a expressão diferencial do tempo é tomada, como as outras grandezas da mecânica, em sua significação algébrica, não requerendo outra interpretação suplementar, por exemplo, por meio de uma representação geométrica.

Em D'Alembert, a compreensão do tempo como grandeza variável da dinâmica suscita, ao lado de sua representação algébrica analítica, uma *interpretação geométrica* e uma *interpretação física* correlativas uma à outra. Uma primeira dificuldade no tratamento da grandeza tempo (sem insistir aqui no tempo absoluto enquanto tal) deve-se à definição originária newtoniana, que repousa em uma tautologia: "O tempo, absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e pela sua natureza, corre igualmente [ou uniformemente] ..." Na ciência do movimento, o tempo é a variável em função da qual a variação das outras grandezas é definida. O tempo, tomado como a variável fundamental do movimento, só depende dele mesmo. Mas como qualificar a variação desta variável? O tempo é uniforme em relação a quê? Se não é em função do próprio tempo... Mas esta tautologia é significativa: ela faz do tempo a referência fundamental do movimento. Desde Newton(35), esta uniformidade do curso do tempo é expressa pela igualdade dos intervalos lineares percorridos em durações iguais, que se traduz na aproximação poligonal das trajetórias ao ponto considerado antes da passagem a limite, quando se considera a mudança de movimento de um móvel sobre uma trajetória; o que equivale, em notação leibniziana, à igualdade dos elementos dt a qualquer instante, como se encontra em todos os autores, de Varignon a Euler, D'Alembert, Lagrange... (Mas nós veremos uma tentativa diferente, ocasional, em D'Alembert, de considerar uma reciprocidade nas variações do tempo e do movimento.)

Essa concepção tautológica da uniformidade do curso do tempo vincula-se ao privilégio concedido ao movimento uniforme, em razão do princípio de inércia(36). E se o movimento uniforme impõe-se como medida natural do tempo, é por causa de sua analogia direta (para as razões dos intervalos) com o tempo que corre uniformemente: "Por este viés, o movimento uniforme é mais análogo à duração, conseqüentemente mais adequado a ser sua medida" (D'Alembert 1, 1ª parte, Cap. 1, p. 11). De uma certa maneira, a naturalidade do movimento uniforme resolve o paradoxo de conceber um tempo independentemente dos fenômenos (um tempo absoluto), enquanto sua determinação deve ser feita por meio das leis dos fenômenos. Ainda que, todavia, o conceba assim, D'Alembert, em suas "Observações sobre a medida natural do tempo", desenvolvidas no Capítulo 1 da 1ª parte do *Traité de dynamique,* consagrado ao princípio da força de inércia, deixa entrever implicitamente, pela sua formulação, como o tempo poderia ser também determinado (ou definido) em função do movimento, em vez do inverso *(id., ibid.,* 1ª parte, Cap. 1, p. 12). Com efeito, isso pode ser dito para os movimentos variados: "Ao contrário [do movimento uniforme], toda lei de aceleração ou de diminuição no Movimento é arbitrária, por assim dizer [entenda-se, com relação à natureza do movimento] e dependente das circunstâncias exteriores" (D'Alembert 1, 1ª parte, Cap. 1, p. 11). No entanto, D'Alembert apenas conclui disso que os movimentos variados não podem constituir uma medida natural do tempo.

Mas, como o que podemos conhecer é a "analogia", isto é, a relação "entre a relação dos tempos e a dos espaços percorridos", é preciso admitir uma reciprocidade entre as partes do tempo e as partes do espaço ligadas pelo movimento: em linguagem diferencial, entre dt e de, e uma ou outra variável, t ou e, poderia ser tomada como referência para a outra. Provavelmente foi devido a uma consideração deste gênero que D'Alembert se propôs várias vezes a conceber dt como variável, e não como constante, como se admitia normalmente, embora ele referisse freqüentemente a variação de um movimento a dt = cte, e desde sua própria definição da aceleração pela diferença segunda, como havíamos salientado *(id., ibid.,* 1ª parte, Cap. 1, art. 17, p. 15; ver mais acima).

Suas tentativas a esse respeito são bastante surpreendentes e pouco comuns para que Lagrange as faça notar em sua *Mecânica analítica.* Ao evocar a dificuldade prática de transcrever em equação o princípio da dinâmica de D'Alembert nos problemas particulares, Lagrange escreve em nota: "O que ainda contribui para complicar essas soluções é que o autor quer evitar tornar os *dt,* ou elementos do tempo, constantes, como ele próprio adverte (art. 94)" (Lagrange 39; *idem* 40, t. 11, 1888, p. 256)(37). A observação de D'Alembert no artigo indicado é a seguinte: "Evitei fazer, na solução deste problema, dos *dt* ou elementos do tempo constantes, para poder obter a equação da curva sem ter a expressão da velocidade, o que seria necessário se os *dt* fossem dados como constantes, porque *dt* sendo , só se pode eliminar *dt* quando se conhece o valor de *u*. [...]" *(id., ibid.,* 1ª ed., 2ª parte, Cap. 3, art. 80, p. 77)(38). No problema tratado, pode-se efetivamente preferir construir a figura considerando-se arcos de curva que não correspondem à *dt* constante. Isso corresponde a uma mudança de variável que resulta em relações mais cômodas para manusear. Outros tratamentos semelhantes encontram-se em diferentes passagens da obra de D'Alembert.

Sua preocupação com ficar livre para considerar o tempo t como uma variável de variação qualquer (com um *dt* variável) liga-se à possibilidade de escolher a variável uniforme de referência em função do problema de dinâmica tratado. Quando ele apela aos *dt* não constantes, é para comparar os elementos de linhas tomados sobre duas curvas, uma sendo a trajetória efetiva, a outra uma trajetória de referência da qual a primeira seria uma deformação, devida à lei do movimento. Pode-se então escolher tomar uma, com os *dt* constantes, ou a outra, com os *dt* variáveis. O que é interessante nessa

consideração do caso geral é que a variação do tempo é considerada como relativa à variação do fenômeno que se tem por objeto, o que faz com que o tempo perca, se refletirmos bem sobre isso, seu caráter absoluto, mas apenas na prática, pois D'Alembert nunca rejeita o tempo absoluto de Newton, mesmo se ele tempera sua concepção do tempo por reflexões bastante leibnizianas *(idem* 9, "Eclaircissements sur l'espace et le temps"). De fato, para ele, o tempo é uma grandeza para a descrição dos fenômenos físicos, e sua representação matemática (analítica) deve permitir a maior flexibilidade a respeito da descrição desses fenômenos. Igualmente aberta está a possibilidade de considerar variações relativas nas quais o tempo não figuraria explicitamente.

O cuidado de D'Alembert a respeito da possibilidade de escolher a variação do tempo que se queira é ligado, de fato, simplesmente a seu modo de tratar os problemas da análise de maneira geral. No artigo "Diferencial" da *Enciclopédia,* ao considerar equações diferenciais de segunda ordem (com a diferença segunda *ddy,* por exemplo, em $\frac{ddy}{dx}$) em que se supõe em geral que *dx* é constante, D'Alembert considera que *dx* não o é mais (isso tendo a ver com o cálculo das derivadas parciais). Basta então, explica, dividir tudo por *dx* e substituir $\frac{ddy}{dx}$ por: $d(\frac{dy}{dx}) = \frac{ddy}{dx} - \frac{dyddx}{dx^2}$, "e teremos uma equação em que nada será constante"(39).

Pode-se remeter à representação geométrica do elemento diferencial de tempo a questão da *dificuldade do "fator 2"* tal como ela aparece em D'Alembert. Mas ela é de fato mais geral e tem a ver com a maneira pela qual se efetua a aproximação poligonal; em seguida, a passagem à tangente, no estudo local das trajetórias. Esse problema relaciona-se com o da modalidade da ação da causa e com a representação da força aceleradora. Johann Bernoulli e Varignon o tinham encontrado a propósito da duração da ação da força: a força age no início de *dt,* depois age apenas no início do instante seguinte; ou então continua a agir durante *dt?* (Vê-se bem que a questão tem a ver com o que se entende por *dt* do ponto de vista físico.) Neste último caso, o espaço percorrido correspondente ao elemento de velocidade *dv* seria $\frac{1}{2}ddx$. D'Alembert não deixa de indicar esse problema cada vez que o encontra, primeiramente no *Traité de dynamique* (notadamente em uma "Observação sobre a comparação das forças aceleradoras entre elas", assim como, no capítulo sobre o movimento composto, na seção "Do movimento em linha curva e das forças centrais"); depois, nas *Reflexões sobre a causa geral dos ventos* e em outras obras, e mesmo em vários artigos da *Enciclopédia,* como, por exemplo, "Central", "Curva", "Diferencial" (D'Alembert 1, p. 20-2, 29; art. 26, p. 27-30; *idem* 3, p. 69-70)[40]. Há uma diferencia de um fator 2 segundo se calcule a força aceleradora pela curva rigorosa (tomando a tangente em um ponto) ou pela curva poligonal aproximada (tomando a corda): os dois casos são equivalentes e conduzem às mesmas equações, se formos coerentes; basta, portanto, para não se enganar, manter sua escolha por um ou outro caso, sem os misturar. Mas ficamos por aqui sobre este assunto, que foi longamente comentado pelos interessados na época, assim como pelos historiadores da ciência (Hankins 38; Bernoulli 15; Blay 16).

5. O "problema recorrente" da dinâmica ou a causa física no tempo

No *Tratado de dinâmica* e em outras obras, D'Alembert evoca de maneira recorrente a modalidade da aquisição inicial do movimento (para os movimentos de inércia) ou da mudança de movimento (para os movimentos acelerados ou retardados), e essa maneira, numa primeira abordagem, pode surpreender. Ela parece à primeira vista, com efeito, remeter simplesmente a hipóteses "metafísicas" às quais o movimento efetivo é alheio e do qual se pode passar, de seu ponto de vista, no conhecimento do movimento. Essa rejeição das causas concerne tanto aos movimentos de inércia, já adquiridos, quanto aos movimentos produzidos.

No que se refere aos *movimentos adquiridos,* ele se pergunta, no prefácio do *Tratado de dinâmica* de 1743: "Um corpo continua a mover-se por si mesmo, ou precisa da ação repetida da causa [que gerou o movimento]?

A respeito disso, qualquer que seja o partido que tomemos [...] [o movimento que ele seguirá será uniforme ...]" (D'Alembert 1, 1ª ed., Pref., p. viii). A formulação é mais precisa no interior mesmo da obra, no Capítulo 1 da 1ª parte, que trata do movimento de inércia: o movimento produz-se uniformemente em linha reta, "pois ou a ação *indivisível e instantânea* da causa motriz no início do movimento basta para fazer o corpo percorrer um certo espaço, ou o corpo precisa, para mover-se, da *ação continuada* da força motora..." No primeiro caso, a comunicação do movimento será feita em um instante, e nesse caso o movimento ficará uniforme (a demonstração apóia-se nas propriedades da linha reta); no segundo, ela terá resultado de uma ação continuada, mas que permanecerá uniforme e constante (pois nada vem determinar a aumentar ou diminuir a causa motora inicial), de tal modo que o efeito nítido será o mesmo nos dois casos *(id., ibid.,* 1ª ed., 1ª parte, Cap. 1, p. 4-6; sublinhado por mim).

O segundo caso imaginado parece considerar a possibilidade de um motor do movimento (tal como o da doutrina do *impetus),* que conservaria este contra uma tendência natural a diminuir, segundo a experiência comum ("como parece que o prova a experiência", escreve D'Alembert); a intenção é claramente pedagógica, e D'Alembert precisa que ele mesmo não pensa que este possa ser o caso: "Não é que eu creia que seja necessário para mover o corpo a ação continuada desta causa". Mas, por meio de sua demonstração, ele descarta, de fato, a hipótese, reduzindo por aí mesmo os princípios de inteligibilidade que fundamentam a consideração do movimento: é necessário somente aceitar a existência do movimento para concluir sua conservação na ausência de ação exterior.

D'Alembert fornece aqui uma outra precisão interessante, que poderá esclarecer-nos sobre a modalidade de mudança de movimento, estudada por ele mais adiante: "Se a ação instantânea não bastasse, qual seria então o efeito desta ação? e, se a ação instantânea não tivesse efeito algum, como a ação continuada o teria?" *(id., ibid.,* 1ª ed., 1ª parte, Cap. 1, p. 6-8). Vemos aqui o vestígio de uma dificuldade em conciliar o *singular* e o *contínuo* na concepção do tempo instantâneo. Mas é a consideração da *variação do movimento* que lhe permitirá formular de maneira precisa e operatória a ação instantânea da causa, em continuidade com a ação precedente, já que esta variação é ela mesma aquisição de um movimento, mas desta vez em um intervalo diferencial de tempo.

No que se refere às *mudanças de movimentos* em razão de uma causa, que pode ser ora a impenetrabilidade dos corpos, no impulso por choques, ora sua atração à distância, D'Alembert indica, no Prefácio: "É evidente que o *efeito produzido pela causa, seja em um tempo finito, seja em um instante*, deve ser dado sempre pela equação entre os tempos e os espaços" (D'Alembert 1, 1ª ed., Pref., p. xi, sublinhado por mim). E precisa, no Capítulo 2 da 1ª parte, sobre o movimento composto: "Eu pensei [...] fazer ver que o caminho do corpo A é o mesmo, *seja* que as duas potências [que se exercem sobre ele, cada uma em uma dada direção] agem sobre ele somente *no primeiro instante, seja* que elas agem *continuamente* todas as duas de uma só vez sobre o corpo" *(id., ibid.,* 1ª ed., 1ª parte, Cap. 1, art. 22, p. 24-5). No entanto, uma observação feita no capítulo precedente (Capítulo 1) sobre o movimento uniforme, depois de ter considerado os movimentos variados por modificação do primeiro (e assim ter definido as grandezas do movimento variado, como foi visto acima), é importante em relação ao problema da modalidade física propriamente dita da comunicação do movimento.

Na aproximação poligonal da curva dos espaços e dos tempos, o espaço percorrido pelo efeito da causa aceleradora (ou retardadora) o é com uma velocidade uniforme, *du:* "Vê-se por aí", indica D'Alembert, "de qual maneira pode reduzir-se a um movimento uniforme o efeito instantâneo da potência que acelera ou que retarda o movimento" *(id., ibid.,* 1ª ed., 1ª parte, Cap. 1, p. 21). Esta nota é ampliada na 2ª edição, de 1758, pela precisão seguinte: se a curva é dada (pela sua equação em termos finitos) e não reconstituída pelas considerações locais, a equação diferencial é obtida diretamente (por diferenciação), e a distância percorrida *dde* (= φdt^2) é verdadeiramente uma diferença segunda[41]. Sendo assim, ele indica em uma outra observação complementar, deve-se conceber diferentemente as modalidades de ação nos dois casos. No caso da aproximação poligonal, com um elemento de velocidade constante, deve-se considerar que este crescimento de velocidade efetuou-se "bruscamente e como de uma só vez", e não gradualmente, *no início do instante infinitesimal* considerado. No caso da curva rigorosa, os elementos de espaço *(dde)* percorridos em razão da mudança de movimento são proporcionais ao quadrado dos "*instantes*" (isto é, dos elementos diferenciais de tempo *dt),* e a velocidade correspondente *(du)* "é suposta acelerando-se ou retardando-se uniformemente durante todo o curso do instante [...] em virtude da potência aceleradora..." D'Alembert indica, nesta passagem, como se pode conceber esta mudança permanente (contínua): "Supõe-se que [a potência aceleradora] dê ao móvel, durante este instante, uma seqüência de pequenos golpes iguais e reiterados [cuja soma] é igual ao único golpe [que se supõe seja dado] ao corpo desde o começo do instante [...] na hipótese da curva poligonal" (D'Alembert 1, 2ª ed., 1ª parte, Cap. 1, Observações sobre as Forças Aceleradoras, Obs. 3, p. 30-1)[42].

Constata-se assim que a "cláusula recorrente" sobre as modalidades da ação da causa nas mudanças de movimentos corresponde a uma preocupação constante de D'Alembert que percorre as diferentes edições do *Tratado de dinâmica.* Podemos apontar três razões para esta preocupação. A primeira é a indiferença, já mencionada, no que se refere ao conhecimento do movimento, do problema "metafísico" das causas e de seu modo de ação; mostrando que o conhecimento do movimento pela sua equação diferencial dos espaços e dos tempos é o mesmo nos dois casos, ele demonstra ao mesmo tempo, senão a inanidade, pelo menos a pouca importância do problema, mesmo do ponto de vista físico. Esta razão, porém, não basta para dar conta sozinha da precisão da argumentação, notadamente se se consideram os acréscimos da 2ª edição do *Tratado.* Uma segunda razão, diretamente operatória, é a preocupação de dar conta das mudanças de movimento tanto *contínuas,* como as causadas pela atração ou a pressão, quanto as *descontínuas* produzidas por choques de corpos duros ou elásticos. Uma terceira razão, igualmente verossímil, refere-se à representação geométrica do elemento diferencial de tempo *dt* e a seu modo de utilização, para as trajetórias tomadas seja diretamente segundo as curvas, seja segundo as séries de linhas poligonais inscritas ou circunscritas que dela constituem a aproximação infinitesimal. Esse modo de utilização poderia ou não corresponder à descrição de uma modalidade de ação real. Estas duas últimas razões parecem ser as mais significativas, e elas concernem *ao pensamento físico da dinâmica*, e ao mesmo tempo a seu *tratamento analítico*[43].

O próprio Newton mencionava o problema nos *Princípios* logo depois do enunciado da segunda lei do movimento, segundo a qual "a mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida; e ela se faz na direção da linha reta sobre a qual esta força é impressa". Ele fazia o seguinte breve comentário: "Se uma força qualquer engendrar um movimento, uma força dupla engendrará um movimento duplo, uma força tripla, um movimento triplo, *que esta força seja impressa na totalidade e de uma só vez [altogether and at once]*, ou então *gradualmente e sucessivamente [gradually and successively]*" (Newton 49, ed. Cajori, Vol. 1, p. 13; sublinhado por mim). Esta alternativa, posta sem insistência, e que não é retomada na seqüência da obra, designa provavelmente os dois gêneros de movimentos que sua segunda lei reúne e unifica: os movimentos *descontínuos*, transmitidos por choques entre corpos duros ou elásticos (evocados um pouco mais adiante no Escólio; *id., ibid.*, ed. Cajori, Vol. 1, p. 22-5)[44], e os movimentos *contínuos*, resultantes de uma aplicação contínua da força, como a de atração. Aliás, Newton precisa, mas a propósito da terceira lei, a da ação e a da reação, que "esta lei ocorre também nas atrações", o que comenta igualmente, um pouco depois, no mesmo Escólio; *id., ibid.).* As duas possibilidades consideradas recobrem a distinção, tradicional antes de Galileu, entre os "movimentos violentos" e os "movimentos naturais", que desaparece sob o único tratamento desses dois gêneros de forças pela segunda lei. Fica claro, para Newton, que *esta lei é matemática,* já que a verdadeira força e as verdadeiras grandezas do movimento são matemáticas. Por diversas vezes, ele afirma nos *Princípios* que apenas quer "dar as noções matemáticas das forças, *sem considerar suas causas e fundamentos físicos" (id., ibid.,* ed. Cajori, Vol. 1, p. 5)[45]. E que "o leitor não deve imaginar que eu queira, por essas palavras, definir o gênero ou a maneira de uma ação, as causas ou as razões físicas..." *(id., ibid.,* ed. Cajori, Vol. 1, p. 5-6). Newton, portanto, não tinha motivo para evocar mais adiante a questão, que só era então assunto de geometria.

Se D'Alembert tem necessidade de insistir e de retomar constantemente sua "cláusula recorrente", é precisamente, por comparação com a sobriedade de Newton sobre esse ponto, pela preocupação de referir-se ao caráter *físico* do movimento e de sua transmissão, que não é, para ele, *a priori* idêntico a um tratamento matemático sobre as grandezas ideais e que pede justificação. Esta justificação é proposta em cada um dos dois casos de figura evocados, por um raciocínio que considera as *grandezas físicas* (as distâncias percorridas em um certo tempo, com suas direções), munidas evidentemente de sua representação matemática. Essas modificações de grandezas, ou essas grandezas nascentes são o efeito, enquanto mudança do movimento, da causa física dessa mudança, que opera de maneira física no tempo *t* considerado e no elemento de duração *dt* (denominado "o instante"), com efeitos físicos (o espaço percorrido pelo corpo segue uma lei diferencial temporal dada).

A identidade do resultado obtido nos dois casos (no começo de *dt,* ou durante *dt)* mostra que a consideração de *dt* basta, de fato, para absorver o problema, para apagar o sentido da questão da *modalidade diferencial* da ação física. O elemento diferencial de tempo *dt,* quantidade que não é finita, nem nula, parece ser o instrumento conceitual que permite tratar fisicamente das causas pelos seus efeitos concomitantes, sem se preocupar com o que são essas causas, até mesmo quanto à modalidade de sua ação. Ao mesmo tempo, a identidade do tratamento pela análise nos dois casos assegura que se pode descrever de igual maneira as variações de movimento contínuas (por atração ou por pressão) e descontínuas (por impulso e choques). Teríamos de retomar aqui a questão, que atravessa o século XVII e a primeira metade do XVIII, dos choques dos corpos duros e dos corpos elásticos (Newton 49, Escólio dos "Axiomas ou leis do movimento", Livro 1; D'Alembert 1, 1ª ed., 1ª parte, Cap. 3 ; 2ª parte, Cap. 3, "Des corps qui se poussent ou se choquent", p. 138 e ss.; 2ª ed., p. 211-52; Mouy 44; Hankins 38, Cap. 8; Viard & Youssouf 71, p. 123-45; Nakata 45; *idem* 46, p. 18-42). Digamos apenas que D'Alembert refere a mudança de movimento devida aos impulsos de corpos duros a um tratamento diferencial (à consideração de equações diferenciais) por meio do pensamento diferencial das grandezas e da noção de movimento virtual. O movimento por choque e o movimento continuado podem ser tratados da mesma maneira, devido à coextensividade da causa (ou força) e de seu efeito segundo o tempo de sua aplicação (instantâneo e diferencial), que torna equivalentes as maneiras de agir desses dois tipos de causas.

É tentador pensar, a propósito disso, que tal é o sentido da observação de D'Alembert indicando, no começo do *Tratado de dinâmica,* que ele se interessará nesta obra pelos movimentos por impulso (nos problemas abordados na segunda parte), os outros (os de atração) tendo sido largamente considerados até aqui. Com efeito, nessa obra, ele refere os movimentos por impulso e contato (os movimentos complexos de sistemas de corpo) à análise, que tem por objeto o contínuo, em vez do inverso, que seria referir os movimentos contínuos como os devidos à atração a movimentos por impulso(46). É o próprio papel da análise e das grandezas da dinâmica pensadas com seu auxílio que lhe forneceram os meios para isso. Mas é também a possibilidade de pensar os movimentos (velocidades e quantidades de movimento, finitas e diferenciais) com a noção de movimento virtual, ligada às de movimento destruído e de tendência ao movimento (por exemplo, com o "movimento nascente"). O problema da ocorrência de uma mudança de movimento é o mesmo que o do nascimento de um movimento, seja finito, seja infinitesimal (no sentido de diferencial, que é conceitualmente dominado).

D'Alembert indica, desde o começo do *Tratado de dinâmica,* a propósito do movimento uniforme, que, se duas acelerações iguais e de sentidos contrários são aplicadas aos corpos, elas entram em equilíbrio e se anulam: o movimento de inércia, uniforme, persiste. O exemplo dado para visualizar um tal caso é o da gravidade equilibrada pela resistência de um fluido (D'Alembert 1, 1ª ed., 1ª parte, Cap. 1, p. 8). (Pode-se ver aí um vestígio do pensamento que guiou D'Alembert na direção do enunciado de seu princípio, a partir de problemas de equilíbrio dos sólidos nos fluidos de suas três primeiras dissertações de mecânica apresentadas na Academia de Ciências, em 1741 e 1742 ; Grimberg & Paty 36). É possível obter o equilíbrio anulando as solicitações contrárias ao movimento, que D'Alembert exprime imediatamente como acelerações, isto é, como elementos diferenciais de

velocidade iguais e opostos: dv e - dv. Nota-se aqui, ao mesmo tempo, o pensamento do infinitesimal ou do diferencial e *a concepção dinâmica do equilíbrio,* isto é, as velocidades virtuais. Lembremo-nos da observação de D'Alembert, quando ele constrói a grandeza aceleração, indicando que a expressão da velocidade do corpo movido, submetida a uma aceleração ou desaceleração, "para um dado instante, deve ser a mesma que ela seria se nesse instante o movimento cessasse de ser acelerado ou retardado". São tais movimentos virtuais que permitem conceber o movimento nascente, isto é, a aceleração instantânea. O movimento que começa a receber uma aceleração nascente suscita a idéia de um movimento como tendência e de uma reversibilidade dessa tendência, desse primeiro movimento nascente: ele pode ser e não mais ser, ser anulado. A idéia de movimento virtual engendra a idéia de aceleração e também a idéia de movimento destruído (esta última conduzindo ao princípio de D'Alembert). O movimento virtual permite homogeneizar os diferentes tipos de movimento. Newton reduzia ou unificava *matematicamente* esses diferentes tipos de movimento por meio de seu conceito de força, já D'Alembert o efetua *fisicamente* pelo movimento virtual. *O cálculo diferencial permite realizar concretamente o movimento virtual*(47), e os dois juntos permitem conceber um movimento finito (como aquele trocado em um choque) pela continuidade com um movimento nascente(48).

Nós tínhamos salientado, no início deste trabalho, como D'Alembert, falando filosoficamente da ciência do movimento dos corpos, preferia empregar o termo *mecânica,* para caracterizá-la como um campo próprio do conhecimento. Podemos agora concluir, conforme o título dado por ele mesmo a seu primeiro tratado sobre este assunto, e igualmente o nome atribuído a seu princípio fundamental, que lhe serve de guia durante toda a obra, a *dinâmica,* que reteve sua *abordagem científica* (sua abordagem de *geômetra,* segundo a denominação da época) neste campo. O que permitia, em sua época, formular, renovando-a, a mecânica entre as ciências, era bem a possibilidade de estabelecer e de resolver os problemas da *dinâmica,* isto é, os princípios, as grandezas e as leis das variações do movimento dos corpos que intervêm nas *condições físicas* dadas. Vimos como, se era necessário partir da consideração das *causas*, dando-lhes um sentido físico o mais preciso possível, estas foram subsumidas fisicamente na *formulação analítica* que escreve estas leis na forma de *equações diferenciais* em todos os casos possíveis de serem concebidos. A própria escolha do termo *dinâmica* por D'Alembert, para caracterizar seu trabalho indicava logo de início, para quem sabia ver, que sua mecânica, por mais racional que ela se propusera a ser, era uma ciência do mundo físico, o que fornecia a chave de sua maneira de pensá-la – chave esta que é ao mesmo tempo a da constituição do pensamento analítico da física.

Abstract: Through his conception of dynamics as the science of changes in the motion of bodies, d'Alembert wants to express these changes by using only magnitudes directly related with motion. He establishes the possibility to conceive these changes as such physically, in relation with their effective causes, without making use of external concepts such as forces, by stating the co-naturality of the physical cause and of its effects, given with the notion of instantaneous acceleration. The physical meaning of instantaneous acceleration is related to the differential form of the time magnitude, and to the concept of virtual motion. This construction of a temporal physical causality, and the correlative use of differential analysis to think the magnitudes of motion endowed with their proper relationships, allow him to formulate the general laws of motion in terms of principles, and to reorganize conceptually newtonian mechanics. As a consequence, the fundamental law of dynamics is not any more Newton's second law, but d'Alembert's "principle of dynamics", formulated for any systems of interacting bodies, demonstrated as a theorem which is a consequence and a synthesis of the three foundational principles of motion. From this being done, the impulse towards a total mathematization of mechanics was determined, while at the same time making quite explicit the physical character of this science. In the present work, we emphasize those aspects that are related to physical conceptualization, which had been made possible thanks to analysis, concerning namely time, acceleration and the magnitudes derived from these, as well as the conceptual pecularities arosen from their geometrical representation.

Key-words: dynamics – mathematization of mechanics – physical conceptualization

Notas

(1) D'Alembert emprega esta expressão constantemente em todas as suas obras de mecânica e de astronomia e no Essai sur les éléments de philosophie *de 1758 (por exemplo, p. 381, 384...). É interessante notar que Lagrange retomará a mesma denominação em sua obra* Mécanique analytique *(Lagrange 39, 1ª ed., 1788; ver também a 4ª ed., p. 239).*

(2) "Vê-se primeiramente com muita clareza que um corpo não pode movimentar-se por si mesmo. Logo, ele não pode deixar o estado de repouso senão pela ação de alguma causa externa" (D'Alembert 1, 1ª ed., Prefácio); expressão retomada textualmente na segunda edição de 1758, e no Capítulo 16, "Mécanique" (idem *8; ed. Schwab, p. 372).*

(3) Ver Henri Poincaré, por exemplo, indicando que uma lei em física, "é uma equação diferencial" (Poincaré 64, p. 125).

(4) "Existe", escreve D'Alembert no prefácio ao Traité de Dinamique, *"entre a mecânica e a geometria esta diferença [...]: a geometria apenas considera no movimento o espaço percorrido, enquanto na mecânica, além disso, considera-se também o tempo que o móvel leva para percorrer este espaço". (D'Alembert 1, 1743, Prefácio, p. vii).*

(5) O tempo e o espaço são de naturezas diferentes, e só se pode compará-los comparando a relação de suas partes. Estas considerações são desenvolvidas em "Observação sobre a medida do tempo" (D'Alembert 1, Cap. 1, 1ª parte, p. 9-12).

(6) Sua própria maneira de exprimir-se sobre este ponto é quase explícita: ver D'Alembert 8, Cap. XIV, p. 289-90.

(7) Por esta razão, D'Alembert não segue de nenhuma maneira o projeto de uma física cartesiana, como isso foi às vezes dito (por exemplo, Hankins 38), ao qual, ao contrário, ele se opõe (Paty 52); sobre a "herança" intelectual, cartesiana, newtoniana e leibniziana, de D'Alembert, ver idem *60.*

(8) D'Alembert o escreve deste modo: "... sobre a clareza e a utilidade das noções abstratas, ...para tratar seguindo o melhor método possível qualquer parte que seja das matemáticas [poderíamos mesmo dizer] qualquer ciência que seja ..." (D'Alembert 8, Cap. 16, p. 367).

(9) Impenetrabilidade e atração, dois conceitos newtonianos, que implicam uma ruptura evidente com a física cartesiana, são de fundamental importância na obra de D'Alembert.

(10) Esta ampliação, para a qual ele próprio terá contribuído durante os quinze anos que separam o Traité *científico de 1743 do* Essai *filosófico de 1758, permite-lhe incluir a astronomia e a física dos fluidos (hidrostática e hidrodinâmica), logo depois da mecânica, como nos capítulos (respectivamente, caps. 17 e 19) do* Essai sur les éléments de philosophie.

(11) Ele escreve também, como vimos acima, que o objeto da dinâmica é o estudo dos movimentos variados. Notemos que Lagrange, que manteve o conceito de força (mas dotando-o de uma expressão analítica), dá, na Mécanique analytique, *uma definição da dinâmica que não é muito diferente, em sua intenção, ou pelo menos em seu vocabulário, da de D'Alembert: "A Dinâmica é a ciência das* forças aceleradoras ou retardadoras *e dos movimentos variado que devem produzir". Ele reporta seus primeiros fundamentos a Galileu (Lagrange 39, Vol. 11, p. 237; sublinhado por mim).*

(12) D'Alembert todavia não recusava absolutamente o emprego destes termos (ver D'Alembert 1, Pref., p. xxv). Ele fala freqüentemente de "potências" para indicar as forças; mas ele referia sempre sua expressão, no tratamento de problemas de mecânica, à de seus efeitos sobre o movimento, ou à sua anulação em uma situação de equilíbrio. Ver, por exemplo: "Quando várias potências agem conjuntamente, chamarei forças resultantes do concurso de ação dessas potências *ou simplesmente* força resultante dessas potências, *uma potência igual e diretamente oposta à que seria capaz de fazer o equilíbrio entre elas"* (id., ibid., *2ª parte, Cap. 2, def. 2, p. 53; sublinhado por D'Alembert).*

(13) De fato, da "falsa metafísica", a que vem da escolástica, pois, para D'Alembert, como para outros autores do século XVIII (entre eles, Kant), existe um sentido positivo da metafísica, que corresponde aproximadamente ao que nós chamamos hoje "epistemologia" (Cassirer 19; Gusdorf 37; Paty 52; idem *59, Cap. 123, p. 2104-22). Sobre Descartes e Leibniz, ver Fichant 31.*

(14) Sobre a justificação, por D'Alembert, do uso do termo "dinâmica", apesar de sua obscura significação original, ver D'Alembert 1, Pref., p. xxiii.

(15) Embora o conceito de vetor não exista ainda, D'Alembert escreve, em seus tratados científicos de geometria, de mecânica ou de astronomia, grandezas geométricas, tais como uma distância ou uma velocidade, etc., sob a forma sintética de um único símbolo para designar conjuntamente suas três componentes, praticando assim, avant la lettre, *a adição vetorial; e da mesma forma para os elementos diferenciais:* a, da; *por exemplo,* a + b, a + da... *As notações particulares utilizadas neste parágrafo do texto são nossas; não de D'Alembert (exceto, claro, o símbolo* d, *criado por Leibniz, que caracteriza os elementos diferenciais).*

(16) Ver as análises sobre os números irracionais como limites de seqüências infinitas, como também sua definição do elemento diferencial pela derivada, dados por D'Alembert nos seus Éclaircissements aux Éléments de philosophie *(1765), respectivamente: Écl. 12, "Éclaircissement sur les éléments de géométrie", em particular p. 337-340, e Écl. 14: "Éclaircissement sur les principes métaphysiques du calcul différentiel", em particular p. 350-352 (D'Alembert 9), ou ainda os verbetes "Différentiel" e "Fluxions" da* Enciclopédia *(D'Alembert & Diderot 13).*

(17) Pode-se acompanhar, na evolução dos manuscritos de Newton sobre as fluxões, paralela a seus escritos sobre o movimento (até as obras De Motu *e* Principia), *seu percurso na direção de um fundamento satisfatório deste cálculo, obtido com a noção de limite, que coincide com a de seu "mé-*

todo das primeiras e últimas razões" (Newton 47; idem *50, Vol. 3, p. 32-353;* idem *48, Vol. 3, p. 32-353;* idem *49; Simonsen 66).*

(18) Axiomas ou leis do movimento, Lei 2: "A mudança do movimento é proporcional à força motriz imprimida; e é feito na direção da linha reta ao longo da qual esta força é imprimida" ("The change of motion is proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed").

(19) Euler dá a mesma fórmula, mas a um fator 2 próximo ($2Mddx = \pm P dt^2$ *), indicando: "É apenas esta fórmula que contém todos os princípios da mecânica" (Euler 29, p. 185-217; ed. J.O. Fleckenstein, p. 81-109). A expressão da velocidade como , e da aceleração como* $\frac{ddx}{dt^2}$*, havia sido dada por Pierre Varignon (nas* Mémoires à l'Académie des sciences de Paris, *para os anos de 1698 e 1700) e era utilizada desde então pelos geômetras analistas. Sobre a definição de Varignon da "velocidade em cada instante", ver Varignon 69; Blay 16, p. 152-221. Euler formulara de maneira sistemática a mecânica do ponto material com o auxílio de diferenciais em sua obra de 1735,* Mechanica sive motus scientia analyticae exposita *(Euler 28, Vol. 1). Colin MacLaurin havia dado a fórmula da aceleração sob a forma fluxional em seu livro* Traité des fluxions *(MacLaurin 41; Bos 17).*

(20) Aqui nós deixaremos de lado o problema levantado, por volta do fim do século XIX, por Ernst Mach, Heinrich Hertz e Henri Poincaré, do caráter desta relação no que se refere às definições da força, da massa e da aceleração: ver Paty 63. A concepção (abaixo) de D'Alembert evita esta crítica (D'Alembert 1, 1ª parte, Cap. 1).

(21) Esta construção das grandezas do movimento é bastante rigorosa do ponto de vista conceitual, em particular, pelas considerações sobre as relações de unidades e sobre os limites. A este propósito, ela não tem medida comum com as construções algorítmicas de Pierre Varignon, que, no entanto, contribuiu sem dúvida alguma para inspirá-lo, exprimindo as fórmulas da velocidade e da aceleração em termos de diferenciais (ver id., ibid., *Cap. 1, art. 14, p. 13-4).*

(22) Huygens, observa Lagrange, já havia considerado igual a arcos de círculo cada parte infinitamente pequena de uma curva qualquer (Lagrange 39, Vol. 11, p. 246-54). Trata-se aqui, com D'Alembert, não de uma trajetória, mas de uma curva em um diagrama de espaço-tempo.

(23) A notação dde *é equivalente a* d^2e *(que ele utilizaria também). Esta equação permite determinar o caráter acelerado do movimento (com o sinal +, a curva sendo convexa) ou retardado (com o sinal -, a curva sendo côncava). A equação também pode ser escrita (D'Alembert 1, 1ª parte, Cap. 1, art. 18) como* φ de = ± udu.

(24) Sublinhado por mim, para assinalar o caráter virtual ou tendencial dos elementos diferenciais das grandezas consideradas.

(25) "Sobre as forças aceleradoras" é o título do art. 19. Ver também o trecho entre as p. 18-20, e especialmente a passagem seguinte, na p. 19: "... Quanto a nós, somente tomaremos a relação de duas forças como aquela de seus efeitos, sem examinar se o efeito é realmente como sua causa".

(26) Os termos "intuição", ou "conteúdo intuitivo" são meus, não de D'Alembert, que, evidentemente, não se exprimia desta maneira.

(27) Sobre o significado dos princípios da mecânica, ver Paty 52, Cap. 6, p. 301-12.

(28) D'Alembert retoma, no início de cada um de seus tratados, a demonstração de seu princípio da dinâmica, adaptando-o ao objeto considerado. Ver, em particular, D'Alembert 4. Lagrange considera, na Mécanique analytique, *que uma das mais frutuosas aplicações do "princípio de D'Alembert" fora sua maneira de tratar o problema da precessão dos equinócios (Lagrange 39, Vol. 1;* idem *40, Vol. 11)*

(29) Os dois últimos textos utilizam o novo ramo do cálculo desenvolvido por D'Alembert.

(30) Ver, em particular, as considerações sobre os "graus de velocidade" e o movimento uniformemente acelerado em Galileo Galilei (Galilei 34, TerceiraJornada). Descartes não buscava a expressão das leis da mecânica em função do tempo, mas como leis de conservação.

(31) Newton só faz explicitamente uso das fluxões no segundo livro dos Principia, *"Sur le mouvement des corps dans les milieux résistants" (Newton 49, Vol. 1, p. 249 e ss.).*

(32) Em tradução inglesa: "with which they vanish".

(33) Sobre o tempo como quarta dimensão, ver Paty 58, p. 87-112.

(34) "Alguns matemáticos definiram a quantidade infinitamente pequena, aquela que se desvanece, considerada não antes que ela se desvaneça, não depois que ela se desvaneceu, mas no momento mesmo em que ela se desvanece. *Gostaria muito de saber que idéia clara e precisa pode-se esperar despertar no espírito através de uma semelhante definição? Uma quantidade é ou alguma coisa ou nada;* se ela é alguma coisa, *ela não é desvanecida;* se ela não é nada, *ela se desvaneceu completamente. A suposição de um estado médio entre esses dois é uma quimera" (D'Alembert 9, p. 353; grifado por D'Alembert); ver também o artigo "Différentiel", (D'Alembert & Diderot 13, Vol. 4).*

(35) Ver, por exemplo, Newton 49, Livro 1, Seção 2, p. 40, etc., sobre a determinação das forças centrípetas.

(36) Esta asserção, que postula a igualdade, ao longo do curso do tempo, dos intervalos de tempo unidade, não é mais válida com a teoria da relatividade geral, que, precisamente, não privilegia mais o movimento uniforme: as durações são dilatadas nos campos de gravitação ou nos referenciais em movimento acelerado. Ver, por exemplo, Paty 56, p. 21-58.

(37) Lagrange faz referência à segunda edição do Traité de dynamique *(p. 108). O artigo correspondente (idêntico) da primeira edição é o art. 80 (p. 77).*

(38) O problema correspondente sendo o problema 2 do Cap. 3, art. 79, p. 74-7; 2ª edição, art. 94, p. 108, e art. 93, p. 104-8.

(39) Ele remete à 2ª parte do Traité de calcul intégral *de Bougainville, "que não vai tardar a ser publicado" (Bougainville 18), e também às* Œuvres *de Jean Bernoulli, Tomo 4, p. 77. Ver a íntegra desta obra de Louis Antoine de Bougainville. Sabemos que D'Alembert inspirou muitíssimo este tratado de seu discípulo.*

(40) No artigo "Différentiel", D'Alembert mostra detalhadamente como podemos enganar-nos sobre a derivada, como Newton se enganou para z^n, dando disso a metade da expressão verdadeira (ele tinha tomado a subtangente da curva). No Traité de dynamique *(D'Alembert 1, ed. 1743, 1ª parte, Cap. 2, p. 22), ele remete à* Histoire de l'Académie *de 1722, onde a questão fora debatida.*

(41) D'Alembert deixa isso explícito por meio de um cálculo, em nota de pé de página (publicado, como os outros da segunda edição, por Étienne Bezout; id., ibid., *2ª ed., 1ª parte, Cap. 1, p. 27).*

(42) Aqui se insere a questão do fator 2, evocada precedentemente.

(43) Pierre Costabel pensou dever sublinhar, para lamentá-los, "alguns obstáculos" de D'Alembert, que afirma rejeitar as causas fundamentando, ao mesmo tempo, seu raciocínio nestas, etc. (ver mais adiante). O mínimo que se possa dizer é que a este erudito teria faltado aqui perspicácia, com isso não conseguindo ver que aí se trata de uma construção de grandezas físicas (Costabel 21, p. 39-46). Nosso método histórico foi, ao contrário, o de tentar entrar nas razões de D'Alembert, considerando suas concepções e os trabalhos em relação aos quais ele se situava. O leitor de hoje não pode ignorar que ele deve seus conhecimentos e sua maneira de ver atual aos trabalhos de criação como os de D'Alembert, que trataram não apenas dos conteúdos de conhecimento como também do estabelecimento das condições de sua inteligibilidade.

(44) Para Newton, as leis são seguidas pelos corpos, independentemente do fato de que estes sejam duros, elásticos ou moles, mas elas são postas diretamente em evidência com os corpos duros, referência feita aos trabalhos sobre as leis dos choques de Christopher Wren, John Wallis et Christiaan Huygens.

(45) A respeito das forças motoras (sublinhado por mim). Ainda, a propósito das forças de atração e de impulso: "considerando tais forças não fisicamente, mas matematicamente" (Newton 49, ed. Cajori, Vol. 1, p. 5).

(46) Hankins lança sobre D'Alembert suspeita de neocartesianismo, quando tudo indica o contrário.

(47) Lagrange retomará esta maneira de pensar o movimento: ele escreve, a propósito das velocidades virtuais, na Mecânica analítica: *a velocidade virtual é "aquela que um corpo em equilíbrio está predisposto a receber, no caso em que o equilíbrio venha a ser rompido, isto é, a velocidade que este corpo teria realmente no primeiro instante de de seu movimento ..." (Lagrange 39;* idem *40, Vol. 11, p. 19).*

(48) Para mais precisão sobre este ponto, ver D'Alembert 1, 1ª ed., 2ª parte, Cap. 3, "Des corps qui se poussent ou se choquent", p. 138-168; 2a ed. (sensivelmente diferente), p. 211-52; Paty 63).

Referências Bibliográficas

1. D'ALEMBERT, J. le R. *Traité de dynamique* (Tratado de dinâmica, no qual as leis do equilíbrio e do movimento dos corpos são reduzidas ao menor número possível, e demonstradas de uma nova maneira, e onde se estabelece um princípio geral para encontrar o movimento de vários corpos agindo uns sobre os outros de uma maneira qualquer). Paris, David, 1743; 2ª ed., modificada e aumentada, Paris, David, 1758.

2. _______. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744). Paris, David, 1754.

3. _______. *Réflexions sur la cause générale des vents.* Paris, David, 1747 (Texto original em latim, 1746: *Pièce qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des Sciences de Berlin pour l'année 1746).*

4. _______. *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le système newtonien.* Paris, David, 1749.

5. _______. *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, 1751; retomado em *Mélanges* de D'Alembert, 1753; 1767. Reed., apres. e anotada por Picavet. Paris, Armand Colin, 1894. Nova ed., intr. e anotações de M. Malherbe, Paris, Vrin, 2000.

6. _______. *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (1749-52). Paris, David, 1752 (trad. por D'Alembert do original em latim, submetido ao concurso da Academia de Berlim em novembro de 1749).

7. _______. *Recherches sur différents points importants du système du monde,* 3 vols. Paris, 1754-6.

8. _______. *Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines.* Paris, 1758. In: *Œuvres philosophiques, historiques et littéraires de D'Alembert*, vol. 2. Paris, Bastien, 1805 [seguidos dos *Éclaircissements]*. Reed., pref. de R.N. Schwab. Hildesheim, Olms, 1965; outra reedição, sem prefácio, Paris, Fayard, 1986.

9. _______. *Éclaircissements à l'Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Paris, In D'Alembert, *Mélanges* (D'Alembert 10), Vol. 5. Paris, 1765; retomado nas edições de 1965 e de 1986 dos *Éléments de philosophie.*

10. _______. *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* (1759-67), 5 vols. Amsterdam, Zacharie Chatelain et fils, 1759-65; 1770.

11. _______. *Œuvres philosophiques, historiques et littéraires de D'Alembert,* 18 vols. Paris, Bastien, 1805.

12. _______. *Œuvres philosophiques, historiques et littéraires*, 5 vols. Paris, Belin, 1821; reed., Genebra, Slatkine Reprints, 1967.

13. D'ALEMBERT, J. le R. & DIDEROT, D. (eds.). *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers,* 17 vols + 11 vols. de pranchas. Paris, Briasson/David/Le Breton/Durant, 1751-80.

14. AUROUX, S. & CHOUILLET, A.-M. (dirs.). *D'Alembert (1717-81), Dix-Huitième Siècle,* n° 16 (número especial), 1984.

15. BERNOULLI, J. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 2: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, Erste Teil (1692-1702); Zweiter Teil (1702-).* Edição crítica (1989-91). Reed. e coment. de P. Costabel & J. Peiffer. Basiléia, Birkhauser, 1988 (Vol. 1), 1991 (Vol. 2).

16. BLAY, M. *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIè et XVIIIè siècles.* Paris, PUF, 1992.

17. BOS, H.J.M. "Mathematics and Rational Mechanics". In: *The Ferment of Knowledge. Studies in the Historiography of Eighteenth Century Science.* Cambridge University Press, 1980.

18. BOUGAINVILLE, L.A. de. *Traité du calcul intégral pour faire suite à l'Analyse des infiniment petits de Mr. le marquis de l'Hospital,* 2 vols. Paris, 1754 e 1756.

19. CASSIRER, E. *La philosophie des Lumières* (orig. alemão, 1932). Trad. de P. Quillet. Paris, Fayard, 1966.

20. CLAGETT, M. *The Science of Mechanics in the Middle Ages.* Madison, The University of Wisconsin Press, 1959.

21. COSTABEL, P. "De quelques embarras dans le *Traité de dynamique*". In: *Dix-Huitième Siècle,* n° 16, 1984.

22. CROMBIE, A.C. [1952]. *Augustine to Galileo. The History of Science. A.D. 400-1650.* Londres, Falcon, 1952; reed. aumentada, Londres, Heinemann, 1957; trad. de J. d'Hermies. *Histoire des sciences de Saint Augustin à Galilée (400-1650),* 2 vols. Paris, PUF, 1958.

23. DESCARTES, R. *Regulæ ad directionem ingenii* (1728). In: *AT,* Vol. 10. Trad. franc.: *Règles pour la direction de l'esprit.* Paris, Vrin, 1970.

24. _______. *Discours de la méthode, suivis d'Essais de cette méthode: La dioptrique, Les météores, La géométrie.* Leiden, 1637. In: *AT* [1964-74], Vol. 6.

25. _______. *Principia philosophiæ*, 1ª ed. *princeps.* Amsterdam, Louis Elzevier, 1644. In: *AT* [1964-74], Vol. 8, p. 1-353. Trad. franc.: *Principes de la philosophie* (1647). In: *AT* [1964-74], Vol. 9, p. 1-362.

26. _______. *Œuvres de Descartes.* Publ. por C. Adam & P. Tannery, 11 vols. (1ª ed., 1896-1913); nova ed. revis., 1964-74; reed., 1996 [ed. indicada como *AT* nas notas].

27. EMERY, M. & MONZANI, P. (eds.). *Jean d'Alembert, savant et philosophe. Portrait à plusieurs voix*, Archives contemporaines. Paris, 1989.

28. EULER, L. *Mechanica sive motus scientia analytice exposita,* 2 tomos. São Petersburgo, Academia das Ciências, 1736; ed. por P. Stäckel. Leipzig/Berlim, Teubner, 1912 *(Opera Omnia,* series 2: *Opera mechanica et astronomica,* vols. 1 e 2).

29. _______. *Découverte d'un nouveau principe de méchanique,* Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 6 (1750), 1752 *(Opera Omnia,* series 2: *Opera mechanica et astronomica,* Vol. 5, ed. de J.O. Fleckenstein. Lausanne, 1957, p. 81-109).

30. _______. *Leonhardi Euleri commentationes physicae: ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes.* Ed. de E. Bernoulli; R. Bernoulli; F. Rubio *et al.* Leipzig/Berlim, Teubner, 1926 *(Opera Omnia,* series 3: *Opera physica miscellanea epistolae,* Vol. 1).

31. FICHANT, M. . *Science et métaphysique dans Descartes et dans Leibniz.* Paris, PUF, 1998.

32. FRAZER, C.G. "J.L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics". In: *Archive for History of Exact Sciences,* 28, n° 3, 1983, p. 197-241; também em Frazer, C.G. [1997], VIII, p. 197-241.

33. _______. *Calculus and Analytical Mechanics in the Age of Enlightenment* (1998). Ashgate/Aldershot (GB), Variorum,1997.

34. GALILEI, G. *Discorsi e dimostrazioni mathematiche in torno di due nuove scienze.* Leiden, 1638; reed., com intr. e notas, por A. Carugo & L. Geymonat. Boringhieri, 1958. Trad. de M. Clavelin. *Dialogues sur deux sciences nouvelles.* Paris, Armand Colin, 1970.

35. _______. *Le Opere,* 20 vols., em 21 tomos. Florença, Naz, 1890-1909.

36. GRIMBERG, G. & PATY, M. *L'origine hydrodynamique du principe de D'Alembert* (a ser publicado).

37. GUSDORF, G. *Les principes de la pensée au siècle des Lumières.* Col. Les Sciences Humaines et la Pensée Occidentale, 4. Paris, Payot, 1971.

38. HANKINS, T.L. *Jean D'Alembert, Science and the Enlightenment.* Oxford, Oxford University Press, 1970.

39. LAGRANGE, L.J. *Mécanique analytique.* Paris, 1788; 4ª ed. (póstuma), de 1753, 2 vols. In: Lagrange 40, Vol. 11 (1888) e Vol. 12 (1889).

40. _______. *Œuvres,* publ. sob a dir. de J.A. Serret (vols. 1-10 e 13) & G. Darboux, 14 vols. Paris, Gauthier-Villars, 1867-92.

41. MacLAURIN, C. *A Treatise of Fluxions.* Londres, 1742.

42. MICHEL, A. & PATY, M. (eds.). *Analyse et dynamique. Études sur l'œuvre de D'Alembert.* Quebec, Presses de l'Université Laval, 2002.

43. MICHEL, A. & PATY, M. (texto a ser publicado).

44. MOUY, P. [1927]. *Les lois du choc des corps d'après Malebranche.* Paris, Vrin, 1927.

45. NAKATA, R. "Concept of force in Jean Le Rond D'Alembert". In: *Revue d'Histoire des Mathématiques* (no prelo).

46. _______. "The General Principles for Resolving Mechanical Problems in D'Alembert, Clairaut and Euler". In: *Historia Scientiarum,* 12, n° 1, 2002, p. 18-42.

47. NEWTON, I. *Tractatus de methodis serierum infinitarum et fluxionem* (red. durante o inverno de 1670-1, publ. em latim em 1779); trad. inglesa: *A Treatise of the Methods of Series and Fluxions,* publ. por J. Colson, em 1736. In: Newton, I. (1967-81), Vol. 3, 1969, p. 32-353; trad. franc. por G.L. Leclerc de Buffon, *La méthode des fluxions et des suites infinies,* 1740; Paris, Blanchard, 1966 (reimpr.).

48. _______. *De Motu Corporum* (outono de 1684) e versões revisadas (1685-6). In: *I.N. Mathematical Papers,* Vol. 6 (1684-9): *Fundamental Investigations on the Motion of Bodies,* p. 30-455.

49. _______. *Philosophiae naturalis principia mathematica,* Londres, 1687; 2ª ed., 1713; 3ª ed., 1726, editada com as variantes por A. Koyré & I.B. Cohen. Cambridge, Cambridge University Press, 1972. Trad. inglesa (conforme a 3ª ed.): *Mathematical Principles of Natural Philosophy,* 2 vols., por A. Motte (1729), revis. e edit. por F. Cajori. Berkeley, University of California Press, 1934, reimpr., 1962.

67. TRUESDELL, C. *Essays in the History of Mechanics*, 1968.

68. VARIGNON, P. "Réflexions sur l'usage que la mécanique peut avoir en géométrie". In: *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1714, p. 77-121.

69. _______. *Éclaircissemens sur l'analyse des infiniments petits.* Escrito póstumo. Paris, 1725.

70. VIARD, J. *Le principe de D'Alembert et la conservation du "moment cinétique" d'un système de corps isolés dans le* Traité de dynamique (a ser publicado).

71. VIARD, J. & YOUSSOUF, I. "Les relations entre élasticité et dureté dans le *Traité de dynamique* et dans l'*Encyclopédie* sont-elles compatibles? Application à la 'déduction' des lois du choc des corps élastiques de celle des corps durs". In: *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie,* n° 22, abril de 1997, p. 123-45.

72. VILAIN, C. "La question du centre d'oscillation de 1660 à 1700". In: *Physis* (a ser publicado).

73. _______. "La question du centre d'oscillation de 1703 à 1743". In: *Physis* (a ser publicado).