Estratégias boas e ruins para um mercado simples de compra e venda

Marilda Sotomayor[§]

RESUMO

Consideramos o jogo de mercado cooperativo onde objetos idênticos e indivisíveis estão para ser vendidos por um único vendedor para compradores potenciais. As preferências dos agentes são descritas por valores de reserva e todos os compradores podem comprar até uma dada cota de objetos. O mecanismo de compra e venda é um leilão de lance lacrado. Os lances submetidos determinam um intervalo $[p_*, p^*]$ do qual um preço de equilíbrio competitivo pode ser selecionado. O preço p é $\lambda p_*+(1-\lambda)p^*$, onde cada escolha de $\lambda\in[0,1]$ e de uma regra de alocação dos objetos definem um mecanismo diferente. Cada um desses mecanismos induz um jogo não cooperativo. Sob certas condições de regularidade, caracterizamos as estratégias dominadas e mostramos que se, em qualquer dos leilões, os compradores jogam um equilíbrio de Nash com estratégias não dominadas, então o *payoff* de equilíbrio é o preço mínimo de equilíbrio segundo as verdadeiras avaliações.

Palavras-chave: mecanismo, leilão, preço competitivo.

ABSTRACT

We consider the cooperative market game where identical and indivisible items are to be sold by only one seller to potential buyers. Agents' preferences are described by a reservation value and all buyers can buy up to their quota of objects. The buying and selling mechanism is a sealed bid auction. Submitted bids determine an interval $[p_*, p^*]$ from where a market-clearing price can be selected. The price p is $\lambda p_*+(1-\lambda)p^*$, where each choice of $\lambda\in[0,1]$ and of a matching rule define a different mechanism. Each of these mechanisms induces a non-cooperative game. Under plausible assumptions we characterize the dominated strategies. Moreover, when buyers play a Nash equilibrium with non-dominated strategies, then the equilibrium payoff is the minimum competitive equilibrium under the true values.

Key words: mechanism, auction, competitive price.

JEL Classification: C78, D78.

§ Universidade de São Paulo, Departamento de Economia. E-mail: marildas@usp.br

Recebido em 20 de outubro de 1999. Aceito em 05 de janeiro de 2000.

1 Introdução

Este trabalho constitui a terceira parte de um estudo sobre um simples jogo de mercado de dois lados, iniciado em Sotomayor (1999a). Esse jogo consiste de um mercado de compra e venda, com um único vendedor interessado em vender vários objetos indivisíveis e idênticos, e um conjunto de compradores, cada um dos quais está interessado em comprar até uma dada cota de objetos. Cada agente coloca um valor monetário sobre cada um dos itens. Estes são os valores de reserva dos objetos para os agentes. O valor de reserva de um comprador significa a quantia máxima pela qual ele aceitaria comprar qualquer um dos bens. O valor de reserva do vendedor representa o preço mínimo pelo qual ele aceitaria vender qualquer um dos objetos. É considerado o caso mais simples, em que o valor de reserva de um comprador para um objeto não depende de quantos objetos ele obterá. Assim os valores de reserva dos objetos para um dado agente são iguais.

Uma interpretação para este mercado é a seguinte. O vendedor tem em mãos uma oferta de $\$s$ para cada um dos objetos, proveniente de algum agente não pertencente ao mercado, que comprará qualquer quantidade de objetos que lhe seja oferecida, por esse preço. Cada comprador j (que pode ser pensado como um intermediário em vez de um consumidor final do objeto) tem em mãos uma oferta de $\$a_j$, por objeto, de um cliente que se compromete a comprar qualquer quantidade $k \leq r_j$ de objetos, se esta quantidade lhe for oferecida pelo comprador (por exemplo, o cliente tem uma agência de carros que só tem espaço para mais r_j carros). Desde que o vendedor sabe que pode ganhar no mínimo $\$s$ por objeto, ele não venderá nenhum objeto a um preço inferior a $\$s$. Desde que cada comprador j sabe que comprando qualquer quantidade de objetos menor ou igual que r_j (mas não mais) ele poderá revender todo o lote pelo preço de $\$a_j$ cada unidade, ele não comprará nenhum objeto por um preço maior que $\$a_j$ e não comprará mais do que r_j objetos.

Assim se o vendedor vende $k_j \leq r_j$ objetos a cada comprador j, por $\$p$ cada unidade, ele ganha $\$(k_j p)$ de cada comprador j; cada comprador j ganha $\$k_j(a_j - p)$.

A função do mercado é encontrar uma alocação factível: um *matching* e um preço factíveis. Um *matching* factível é uma alocação dos objetos para os compradores, que designa a cada comprador, no máximo, a sua cota de objetos e tal que cada objeto é alocado, no máximo, uma única vez. Um preço factível é um número que é maior ou igual ao preço de reserva do vendedor e é o mesmo para todos os objetos.

A condição de todos os objetos serem vendidos pelo mesmo preço é razoável, visto que existe um único vendedor e todos os objetos são idênticos. Entretanto existem situações economicamente naturais em que o vendedor discrimina, especificando diferentes preços para diferentes compradores. Esta é, por exemplo, a situação com que nos deparamos num mercado de trabalho. Aqui os vendedores são trabalhadores que vendem seus serviços às firmas, por salários. Cada trabalhador dispõe de uma cota de horas de trabalho por semana que ele poderá distribuir entre as várias firmas que porventura o empregarem. Cada firma poderá contratar até uma certa cota de unidades de homens-hora de trabalho por semana. Um dado trabalhador pode ser empregado por diferentes firmas, por diferentes salários-hora. Mas dentro de uma mesma firma ele recebe o mesmo pagamento por cada hora de trabalho semanal. O nosso modelo corresponde ao caso em que o número de trabalhadores é igual a um. Neste caso o valor de reserva da firma j é o salário-hora máximo que ela pagaria ao trabalhador. Naturalmente, o salário-hora mínimo que o trabalhador aceitaria para trabalhar numa dada firma poderá variar dependendo da atividade que ele realizará na firma.

A regra do jogo de mercado é que qualquer comprador pode efetuar uma transação, juntamente com o vendedor, e dividir entre si os ganhos da transação da forma que desejarem; um comprador é livre de não comprar nenhum objeto e o vendedor é livre de não vender nenhum de seus objetos.

Como foi argumentado em Sotomayor (1999a), o conceito solução adequado a este tipo de mercado é o de equilíbrio competitivo. Relembremos brevemente este conceito:

Um dado preço p é um preço de equilíbrio competitivo se é factível e se existe um matching factível x tal que (a) *p é o preço de reserva do vendedor se houver algum objeto não designado por x e* (b) *se $k \geq 0$ objetos são designados a um comprador por x, então, dado p, nenhuma outra quantidade dará a este comprador um ganho total maior do que o que ele obtém com a quantidade k.*

Neste caso dizemos que (p,x) é um equilíbrio competitivo e que x é compatível com p.

Em Sotomayor (1999a) é mostrado que se (p,x) é um equilíbrio competitivo então x é um *matching* ótimo. Reciprocamente, todo *matching* ótimo é sustentado por qualquer preço de equilíbrio.

A idéia de um *matching* ótimo é a seguinte. Se k objetos são designados a um comprador j, então o valor do par (j,k) é k vezes a diferença entre o valor de reserva de j e o preço de reserva do vendedor. Dado um *matching* factível, a soma dos valores de todos os pares (j,k), onde k é o número de objetos designados ao comprador j, é chamada de valor do *matching*. *Um matching é ótimo (ou a alocação dos objetos é eficiente) se ele tem o valor máximo dentre todos os matchings factíveis.*

É possível que em um *matching* ótimo alguns objetos não sejam alocados. Pode, também, existir mais de um *matching* ótimo. Isto ocorre quando dois ou mais compradores têm os mesmos valores de reserva. Por exemplo, se existem dois compradores com cota *2* e o mesmo valor de reserva igual a *V*, e dois objetos com preço de reserva menor que *V*, então é ótimo alocar um objeto para cada comprador ou alocar dois objetos para um deles e nenhum objeto para o outro. Nestes dois últimos casos dizemos que o *matching* ótimo é *simples*.

Este modelo de mercado é uma generalização do caso bem conhecido em que todos os compradores tem cota igual a um e tem sido amplamente explorado na literatura de leilões de múltiplos objetos idênticos. Em geral se supõe que os compradores podem comprar todos os objetos ou que existe uma limitação sobre o número de objetos imposta pelo mercado, que é a mesma para cada comprador. Ele está, também, relacionado com o jogo de designação múltipla (ver Sotomayor, 1992 e Crawford e Knoer, 1981). A diferença é que num jogo de designação de múltiplos parceiros os preços podem ser distintos mesmo que os valores de reserva dos objetos sejam os mesmos por parte dos compradores. Isto porque, em contraste com o nosso modelo, pode haver mais de um vendedor, cada um possuindo um objeto. Assim, mesmo no caso dos objetos terem o mesmo valor para os compradores, será razoável, algumas vezes, esperar preços distintos. Por exemplo, se existem dois objetos e somente um comprador cuja cota é *2* e cujos valores de reserva sejam iguais a *3*, então se os objetos têm preços *1* e *2*, por exemplo, o comprador demandará os dois objetos. No nosso modelo esses preços não podem ser de equilíbrio, pois não são considerados factíveis.

Com o intuito de produzir os equilíbrios competitivos, uma classe de leilões de lance lacrado é proposta em Sotomayor (1999b). Em qualquer desses mecanismos, cada comprador escolhe um lance que é entregue ao leiloeiro. Um equilíbrio competitivo é então encontrado pelo leiloeiro de acordo com alguma regra de leilão, que consiste em uma regra de preço e uma regra de *matching*, denominada de regra de desempate. A regra de preço é dada por uma combinação convexa das regras que produzem o preço mínimo e o preço máximo de equilíbrio. A regra de desempate se processa em duas etapas. Na primeira o leiloeiro determina o conjunto dos *matchings* ótimos e simples que alcançam o valor mais alto no mercado original.[1] Na segunda etapa é escolhido um *matching* deste conjunto. Quando existe um único objeto a ser vendido, este critério é equivalente a requerer que o leiloeiro venda o objeto ao ofertante que tem a avaliação mais alta dentre aqueles com o mais alto lance. (Veja Osborne e Rubinstein, 1994, exercícios 18.1 e 18.2)

1 O modelo tratado aqui usa a hipótese de informação completa sobre as verdadeiras avaliações dos compradores por parte de todos os agentes, inclusive do leiloeiro. A idéia subjacente é muito simples e aplica-se aos modelos em que, conhecendo-se o uso que um comprador dará para um dado objeto, seja possível estimar quanto ele ganhará possuindo o objeto e daí deduzir o valor do objeto para o comprador.

Em Sotomayor (1999b) são tratadas as questões estratégicas dos compradores nos jogos, com informação completa, induzidos pelos leilões propostos. Vários aspectos comuns a esses jogos são identificados. Sob a hipótese de que todos os licitantes têm a mesma cota, e o número de objetos é um múltiplo dessa cota ou é maior que o número desses agentes, um dos teoremas centrais prova que toda alocação de equilíbrio de Nash é um equilíbrio competitivo. Um outro resultado mostra a existência de uma estratégia conjunta, b^*, que é um equilíbrio de Nash em todos os jogos de leilão, independentemente das regras de preço e de desempate consideradas. Mais ainda, a alocação de equilíbrio de Nash correspondente é a de preço mínimo de equilíbrio competitivo em relação às verdadeiras avaliações. Estes resultados implicam que, desde que os compradores podem obter a informação necessária para construir b^*, existe um sentido em que podemos considerar b^* como o melhor método de jogar para os compradores desde que: (a) b^* é um equilíbrio de Nash em todos os jogos de leilões, logo nenhum comprador será tentado a se desviar dela em nenhum desses jogos; (b) dentre todas as estratégias de equilíbrio de Nash ela dá aos compradores o mais alto *payoff* possível.

Mas é claro que aconselhar um comprador a escolher esta estratégia será inútil se ele não tiver a informação requerida para computar b^* Assim é que talvez devêssemos considerar b^* como "boa estratégia" somente em situações em que todos os jogadores conhecessem as avaliações dos seus rivais. Que conselho então poderíamos dar aos compradores quando a informação sobre as avaliações dos outros compradores não está disponível? Em outras palavras, quais estratégias deveriam ser consideradas boas e quais deveriam ser consideradas ruins? Quando os compradores têm uma estratégia dominante, eles podem confiantemente declará-la sem se preocupar com as avaliações dos outros jogadores. Então esta é uma boa estratégia. Consideraremos uma estratégia ruim se ela for dominada fracamente por outras estratégias disponíveis.

Em Sotomayor (1999b) é mostrado que, para qualquer leilão, a estratégia sincera não é a melhor política. No entanto, em Sotomayor (1999a) é mostrado que no caso especial do mecanismo que produz o preço de equilíbrio competitivo mínimo, quando todos os licitantes têm a mesma cota, e o número de objetos é um múltiplo dessa cota ou é maior que o número desses agentes, é uma estratégia dominante para os compradores revelar as verdadeiras avaliações. Assim é que neste artigo nos restringiremos aos mecanismos de leilão que não produzem o preço mínimo de equilíbrio competitivo, assumindo que os compradores têm a mesma cota, e o número de objetos é um múltiplo dessa cota ou é maior que o número desses agentes. Sob estas condições caracterizamos as estratégias dominadas e mostramos que se os compradores jogam um equilíbrio de Nash com estratégias não dominadas, então o *payoff* de equilíbrio é o preço mínimo de equilíbrio segundo as verdadeiras avaliações. Como já sabemos, este também é o preço obtido no leilão que produz o preço mínimo de equilíbrio quando os compradores jogam suas estratégias dominantes. Assim, estabelecemos um teorema geral de equivalência de *payoffs* para os agentes.

Vários autores têm olhado para outros simples mecanismos de alocação que levam a equilíbrios competitivos. Para o mercado de objetos não idênticos e demanda unitária, Demange e Gale (1985) mostram que se os vendedores podem manipular seus preços de reserva e o mecanismo produz o equilíbrio competitivo mínimo, os vendedores podem forçar o preço máximo de equilíbrio via equilíbrios de Nash, enquanto é uma estratégia dominante para os compradores revelar a verdade. Se o mecanismo produz o equilíbrio competitivo máximo, então é ótimo para os vendedores revelar seus verdadeiros preços de reserva enquanto os compradores podem forçar o preço mínimo de equilíbrio por equilíbrios de Nash.

Demange (1982) e Leonard (1983) consideraram um mecanismo de alocação que é uma generalização do leilão de segundo preço de um único objeto para o caso de itens distintos onde os compradores têm cota unitária. O leilão de segundo preço foi primeiro descrito por Vickrey (1961), para um mercado com um objeto e onde os compradores têm cota unitária.

O mecanismo de leilão de múltiplos objetos distintos e cota unitária de Demange e Leonard requer que cada ofertante submeta um lance lacrado listando sua avaliação para todos os itens. O leiloeiro então aloca os objetos de acordo com o preço mínimo competitivo. Estes artigos provam que a importante propriedade de compatibilidade de incentivos do leilão de Vickrey generaliza para o caso de múltiplos objetos, significando que declarar a verdadeira avaliação é uma estratégia dominante para os compradores. Mas, geralmente (Demange e Gale, 1985) nenhum subconjunto de compradores pode, usando de não sinceridade na revelação de suas avaliações, melhorar o resultado para todos os seus elementos. (Ver Roth e Sotomayor, 1990)

Em Demange, Gale e Sotomayor (1986) são apresentados dois mecanismos dinâmicos de leilões para um mercado de múltiplos objetos distintos. Um deles produz, num número finito de etapas, o preço mínimo de equilíbrio. O outro chega a uma alocação final que converge para o equilíbrio competitivo mínimo, e é um caso especial do algoritmo de Crawford e Knoer (1982).

Este artigo é organizado da seguinte forma. Na seção 2 descrevemos o modelo cooperativo apresentado em Sotomayor (1999a). Na seção 3 descrevemos os mecanismos de leilões de lance selado. A seção 4 enuncia e demonstra os resultados que caracterizam as estratégias dominadas. A seção 5 apresenta o resultado da equivalência de *payoffs*.

2 Modelo cooperativo formal

Existem m compradores: $1,2,...,m$ e n objetos indivisíveis e idênticos. O conjunto de compradores será denotado por P e um comprador genérico por j ou k. O conjunto de objetos será denotado por Q e um objeto genérico por q. O valor de cada objeto para o comprador j é $a_j \geq 0$. Cada comprador tem uma cota r_j, representando o número máximo de objetos que está interessado em comprar, onde r_j é um número inteiro maior ou igual a zero. Normalizando, consideraremos que o preço de reserva de cada objeto para o vendedor é 0. Assim o mercado é dado por $M=(P,Q,r,a)$.

Definição 1: *Um **matching factível** para $M=(P,Q,r,a)$ é um vetor $x=(x_1,...,x_m)$ de coordenadas inteiras não negativas tais que $\sum_{j\in P} x_j \leq n$ e $x_j \leq r_j$.*

Se $x_j=c$ (c pode ser zero) diremos que c objetos são designados para o comprador j pelo *matching* x ou que o comprador j compra c objetos segundo x. Se um *matching* x é factível então segue da Definição 1 que $\sum_{j\in P} x_j \leq \min\{n, \sum_{j\in P} r_j\}$.

Definição 2: *Um preço **factível** é qualquer número real $p \geq 0$.*

O par (p,x), onde p é um preço factível e x é um *matching* factível, é chamado de alocação factível. Se o comprador j compra c objetos pelo preço p então o seu *payoff* total será $c(a_j-p)$. Neste caso dizemos também que (p,x) aloca c objetos para j ao preço p.

Definição 3: *O **conjunto de demanda de j ao preço p**, que será denotado por $D_j(p)$, é dado por $D_j(p)=\{c \text{ inteiro}; 0 \leq c \leq r_j \text{ e } c(a_j-p) \geq c'(a_j-p)\ \forall\ c', \text{ com } 0 \leq c' \leq r_j\}$.*

Conseqüentemente,

$D_j(p)=\{r_j\}$ se $a_j > p$;

$D_j(p)=\{0,1,2,...,r_j\}$ se $a_j=p$ e

$D_j(p)=\{0\}$ se $a_j<p$.

$D_j(p)$ é o conjunto das quantidades de objetos que maximizam o *payoff* total de j ao preço p. Portanto, não só j é indiferente entre duas quaisquer quantidades demandadas, como também ambas lhes dão o *payoff* total mais alto possível.

Definição 4: *O preço p é chamado **competitivo** se existe um matching factível x tal que $x_j \in D_j(p)$, para todo comprador j. Neste caso x é dito ser **compatível** com p.*

Assim, dado um preço competitivo, cada comprador pode comprar alguma quantidade demandada por ele ao preço dado.

Definição 5: *A alocação (p,x) é um* ***equilíbrio competitivo*** *se p é competitivo, x é compatível com p e além disso p=0 se houver algum objeto não vendido.*

Se (p,x) é um equilíbrio competitivo então p é chamado de ***preço de equilíbrio*** *e x é chamado* ***matching competitivo***.

Isto é, a equilíbrios competitivos, não somente todo comprador obtém uma quantidade de objetos do seu conjunto de demanda, mas também todo objeto com preço superior ao seu preço de reserva é vendido, posto que se existir algum objeto não vendido então todos os preços são iguais ao preço de reserva.

Suponha que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$. Então $a_1, \ldots a_1, a_2, \ldots a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_m$ é uma ordenação decrescente dos valores de reserva dos compradores onde cada a_j é repetido r_j vezes. Um *matching* ótimo associa os K objetos com os K primeiros valores da ordenação, onde $K = \min\{n, \sum_{j \in P} r_j\}$. Esta ordenação pode não ser única no caso em que há empates nos valores de reserva dos compradores. Nestes casos várias outras formas de ordenar de modo decrescente esses valores podem ser consideradas para se conseguir um *matching* ótimo. Por razões técnicas nos concentraremos nos *matchings* ótimos em que há, no máximo, um comprador que recebeu algum objeto e não preencheu a sua cota. Não há nenhuma perda em supor isso. Esses *matchings* serão chamados de *matchings ótimos simples*.

Observação 1: Se existir algum objeto não designado e algum comprador j que não tenha preenchido sua cota num *matching* factível, com $a_j=0$, então se alocarmos o objeto para j não alteramos o valor de x. Assim sendo, não perderemos nada em assumir que, sempre que existir algum objeto não alocado a nenhum comprador por um *matching* factível, então todo comprador j com $a_j=0$ terá preenchido sua cota segundo este *matching*.

Definição 6: *p^* é o* ***preço máximo de equilíbrio*** *se $p^* \geq p$ para todo preço de equilíbrio p; p_* é o* ***preço mínimo de equilíbrio*** *se $p_* \leq p$ para todo preço de equilíbrio p.*

Definição 7: *Seja (p,x) um equilíbrio competitivo.* ***O vetor de payoffs associado a (p,x)*** *é o vetor $u=(u_1,\ldots,u_m)$ onde $u_j=\max\{0,a_j-p\}, \forall j \in P$.* ***O payoff total de $j \in P$ associado a (p,x)*** *é dado por $x_j u_j$.*

Seja x um *matching* ótimo simples. Defina:

$A_x=\{j\in P;\ x_j=r_j\}$, $B_x=\{j\in P;\ 0<x_j<r_j\}$ e $C_x=\{j\in P;\ x_j=0\}$. Então $|B_x|=0$ ou $|B_x|=1$.

Os seguintes resultados estão demonstrados em Sotomayor (1999a) e serão utilizados nas seções seguintes.

Proposição 1*: *Seja (p,x) um equilíbrio competitivo. Então x é um matching ótimo.*

Proposição 2*: *Seja x um matching ótimo e p um preço de equilíbrio. Então x é compatível com p.*

Proposição 3*: *Seja x um matching ótimo e simples. Então*

(i) $p^*=p_*=a_j$ se $B_x=\{j\}$;

(ii) $p^*=min\{a_j;j\in A_x\}$ e $p_*=max\{a_j;\ j\in C_x\}$, se $B_x=\phi$ e $C_x\neq\phi$;

(iii) $p^*=min\{a_j;\ j\in A_x\}$ e $p_*=0$ se $B_x=\phi$, $C_x=\phi$ e $n=\sum_j r_j$ e

(iv) $p^*=p_*=0$ se $B_x=\phi$, $C_x=\phi$ e $n>\sum_j r_j$.

Proposição 4*: *Sejam a' e $a''\in R^n+$ Sejam p'_*, p'^* p''_* e p''^* os preços mínimo e máximo de equilíbrio para $M'=(P,Q,r,a')$ e $M''=(P,Q,r,a'')$, respectivamente. Se $a'\geq a''$ então $p'_*\geq p''_*$ e $p'^*\geq p''^*$.*

3 Mecanismos de leilão simultâneo de lance lacrado

Nesta seção interpretaremos P como um conjunto de ofertantes. Descreveremos uma classe de leilões simultâneos de lance lacrado para o mercado $M=(P,Q,r,a)$, onde o preço de reserva de cada objeto é considerado zero por simplicidade, e para todo comprador j, a_j é o verdadeiro valor de um objeto para j. Os agentes podem comunicar-se entre si de tal forma que r e a são de conhecimento comum entre eles. Sem perda da generalidade podemos assumir que $a_j\geq 0$ para todo comprador j, desde que, caso contrário, o comprador não participará do leilão. Na primeira etapa cada ofertante j seleciona um lance $b_j\geq 0$, que é encerrado num envelope e entregue ao leiloeiro.

De posse de $b=(b_1,\ldots,b_m)$ o leiloeiro encontra um preço $p(b)$ e um *matching* $x(b)$, de acordo com a *regra do leilão* $(p(.),x(.))$. A primeira componente é chamada *regra de preço de equilíbrio* e determina para cada vetor de lances b um preço de equilíbrio $p(b)$ para o mercado $M(b)=(P,Q,r,b)$. Denotando por $p_*(.)$ e $p^*(.)$ as regras que produzem o preço mínimo e o preço máximo de equilíbrio, respectivamente, a regra de preço $p(.)$ é dada por $p(.)=\lambda p_*(.) + (1-\lambda)p^*(.)$, para algum $\lambda\in[0,1]$. A segunda componente é chamada de *regra de desempate.* Ela se processa em duas etapas. Na primeira o leiloeiro encontra $\Sigma(b)$, o conjunto de todas as alocações ótimas simples. Portanto, ele encontra todos os *matchings* ótimos em que existam no máximo um comprador que não preencheu a sua cota e recebeu algum objeto. Então se, digamos, $\Sigma(b)=\{x^1,\ldots,x^t\}$. o leiloeiro determina o conjunto das alocações $x^*\in\Sigma(b)$ tal que $\Sigma_j a_j x^*_j=\max\{\Sigma_j a_j x^1_j,\ldots, \Sigma_j a_j x^t_j\}$. Este conjunto será denotado por $\Sigma^*(b)$. Assim, $\Sigma^*(b)$ é o conjunto das alocações que alcançam o valor mais alto em M dentre todas as alocações ótimas simples para $M(b)$. Na segunda etapa o leiloeiro escolhe $x(b)\in\Sigma^*(b)$. O fato de que $x(b)$ e $p(b)$ são compatíveis segue da Proposição 2*

Se t objetos são alocados para o ofertante j, então $0\leq t\leq r_j$. O comprador j pagará $tp(b)$ ao leiloeiro e receberá de volta o valor $s(r_j-t)$. Assim o leiloeiro receberá o total $t(p(b)+s)$ de j. O *payoff* total de j será $t(a_j-p(b))$.

Definição 8. *Seja $x(b)\equiv x$. O* ***payoff verdadeiro do comprador j*** *associado ao resultado $(p(b),x)$ é: $U_j(b,x)=a_j-p(b)$ se $x_j>0$ e $U_j(b,x)=0$ se $x_j=0$. O* ***payoff total verdadeiro de j*** *associado a $(p(b),x)$ é $x_jU_j(b,x)$.*

O vetor $U(b,x)=(U_1(b,x),\ldots,U_m(b,x))$ é chamado de *payoff verdadeiro associado a $(p(b),x)$*. Denotaremos por $U^*(b,x)$ (resp. $U_*(b,x)$) o *payoff* verdadeiro associado a $(p_*(b),x)$ (resp. $(p^*(b),x)$).

Definição 9: *A estratégia conjunta b é um* ***equilíbrio de Nash*** *do jogo de leilão com regra $(p(\ ),x(.))$, se para nenhum j existe b' com $b'_t=b_t$ para todo $t\neq j$, tal que para $x=x(b)$ e $y=x(b')$, $y_jU_j(b',y)>x_jU_j(b,x)$. Se b é um equilíbrio de Nash para $(p(.),x(.))$ dizemos que* ***(U(b,x),p(b)) é o payoff de equilíbrio correspondente a b*** *e* ***(p(b),x(b)) é a alocação de equilíbrio de Nash correspondente a b.***

Assim, um *payoff* de equilíbrio é o *payoff* em M correspondente às transferências obtidas de um equilíbrio de Nash

No que segue estaremos considerando a classe de leilões determinada por uma regra arbitrária de preço de equilíbrio, *p(.)*, diferente da regra de preço mínimo de equilíbrio. Uma estratégia conjunta será portanto um vetor de lances para qualquer um dos leilões desta classe.

A seguinte observação será de utilidade.

Observação 2: Sejam $P=\{1,...,m\}$, $|Q|=n$ e $r_j=c$ $\forall$ $j\in P$. Se $n>mc$ ou n é um múltiplo de c, então é fácil ver que, para todo mercado $M(b)$ e para toda alocação $x\in\Sigma^*(b)$, $x_j=c$ ou $x_j=0$. I.e., para todo mercado $M(b)$, $B_x=\phi$ $\forall$ $x\in\Sigma^*(b)$.

Os seguintes resultados serão usados nas próximas seções e/ou foram mencionados na seção 1. O Teorema 1* foi demonstrado em Sotomayor (1999a) e os Teoremas 2*, 3* e 4* em Sotomayor (1999b).

Teorema 1*: *Se todos os compradores têm a mesma cota c e n>mc ou n é um múltiplo de c, então é uma estratégia dominante para os compradores revelar suas verdadeiras avaliações em qualquer leilão de preço mínimo de equilíbrio.*

Teorema 2*. *Para cada comprador j seja* $b_j=p_*$ *se* $a_j\geq p_*$ *e* $b_j=a_j$ *caso contrário. Suponha que* $r_j=c$ $\forall$ $j\in P$. *Além disso n>mc ou n é um múltiplo de c. Então b é um equilíbrio de Nash para todo jogo de leilão. Além disso o payoff* (u^*,p_*) *é o payoff de equilíbrio correspondente.*

Teorema 3*: *Se b é um equilíbrio de Nash para algum jogo de leilão, então* $|E(b)|=1$.

Teorema 4*. *Suponha que* $r_j=c$ $\forall$ $j\in P$. *Além disso n>mc ou n é um múltiplo de c. Se b é um equilíbrio de Nash para o jogo de leilão de regra (p(.),x(.)), então (p(b),x(b)) é um equilíbrio competitivo segundo os verdadeiros valores.*

4 Estratégias dominadas

Nesta seção a regra de desempate será uma regra qualquer. O leiloeiro não conhece os verdadeiros valores dos objetos por parte dos compradores. (Ele poderia desempatar dois compradores usando a ordem alfabética dos seus nomes, por exemplo). Os compradores têm a mesma cota c e $n>mc$ ou n é um múltiplo de c.

Definição 10. A *estratégia* b_j *para o jogador j* ***domina*** *uma outra estratégia* b'_j *para o mesmo jogador, se o payoff total verdadeiro de j quando ele joga* b_j *é maior ou igual ao seu payoff total verdadeiro quando ele joga* b'_j, *não importa o que os outros jogadores joguem.* A *estratégia* b_j *para o jogador j* ***domina fracamente*** *uma outra estratégia* b'_j *para o mesmo jogador, se* b_j *domina* b'_j *e se, para pelo menos uma das estratégias* *conjuntas dos outros jogadores, o payoff total verdadeiro de j quando ele joga* b_j *é maior do que o seu payoff total verdadeiro quando ele joga* b'_j

Se $n>mc$ então todos os compradores preenchem suas cotas em qualquer leilão e pagam 0, independentemente dos lances que submeterem. Assim, qualquer estratégia b_j é não dominada. No caso de existir somente um comprador j, o lance $b_j=0$ domina fracamente qualquer outra estratégia do jogador j. Os casos mais interessantes são os outros. Assim, daqui para a frente estaremos assumindo que n é um múltiplo de c e existem, no mínimo, dois compradores. Sob estas hipóteses podemos essencialmente caracterizar as estratégias dominadas dos compradores pelos seguintes três teoremas.

Teorema 1. *Suponha que todos os compradores têm a mesma cota c e n é um múltiplo de c. Seja* $j\in P$*. Então a estratégia* b_j *com* $b_j>a_j$ *é dominada fracamente por* a_j *em qualquer leilão de regra de preço* $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$*, com* $\lambda\in[0,1)$*.*

Demonstração. Seja $(p(.),x(.))$ uma regra de leilão com $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$, com $\lambda\in[0,1)$. Seja c_{-j} um conjunto de estratégias dos outros jogadores diferentes de j. Denotemos $\alpha\equiv(a_j,c_{-j})$ e $x(\alpha)\equiv x$. Sejam $\alpha'\equiv(b_j,c_{-j})$ e $x(\alpha')\equiv x'$ Queremos mostrar que $x_j(\alpha)U_j(\alpha,x(\alpha))\geq x_j(\alpha')U_j(\alpha',x(\alpha'))$ e que para alguma estratégia conjunta d_{-j}, com $\beta=(a_j,d_{-j})$ e $\beta'=(b_j,d_{-j})$ temos $x_j(\beta)U_j(\beta,x(\beta))>x_j(\beta')U_j(\beta',x(\beta'))$. Denotemos $x(\alpha)\equiv x$, $x(\alpha')\equiv x'$, $x(\beta)\equiv y$, $x(\beta')\equiv y'$, $u_j\equiv U_j(\alpha,x(\alpha))$, $u'_j\equiv U_j(\alpha',x(\alpha'))$, $w_j\equiv U_j(\beta,x(\beta))$ e $w'_j\equiv U_j(\beta',x(\beta'))$. Analisaremos dois casos.

Caso 1. $x_j=0$. (Este caso é possível desde que estamos assumindo que $m\geq2$). Então, $C_x\neq\phi$, $j\in C_x$ e $a_j\leq c_k\equiv\min\{c_q;\ q\in A_x\}$. Se $x'_j=0$, então $u_j=u'_j=0$. Se $x'_j>0$ então $b_j\geq c_k$ e k é deslocado para $C_{x'}$. Portanto, $p(\alpha')\geq c_k\geq a_j$, donde $u'_j=a_j-p(\alpha')\leq 0=u_j$, donde $x_ju_j\geq x'_ju'_j$.

Caso 2. $x_j=r_j$. Conseqüentemente, $x'_j=r_j$. Então, $j\in A_x$ e $j\in A_{x'}$. Pela Proposição 4* temos que $p^*(\alpha')\geq p^*(\alpha)$ e $p_*(\alpha')\geq p_*(\alpha)$, donde $p(\alpha')=\lambda p_*(\alpha')+(1-\lambda)p^*(\alpha')\geq\lambda p_*(\alpha)+(1-\lambda)p^*(\alpha)=p(\alpha)$. Logo, $u_j=a_j-p(\alpha)\geq a_j-p(\alpha')=u'_j$. Como $x_j=x'_j$ implica que $x_ju_j\geq x'_ju'_j$.

Portanto, em qualquer caso temos que $x_ju_j\geq x'_ju'_j$.

De acordo com a notação dada acima, falta mostrar que existe alguma estratégia d_{-j} tal que $y_jw_j>y'_jw'_j$. Temos também dois casos para analisar.

Caso 1. $n=tc$, com t inteiro positivo e $t<m$ (é possível pois $m\geq2$). Então, em qualquer leilão, $m-t$ compradores não obterão nenhum objeto e t compradores preencherão a sua cota. Seja C um conjunto com $m-t$ compradores e A um conjunto com t compradores, tal

que C e A sejam disjuntos e $j \in C$. Defina $\beta=(a_j, d_{-j})$ tal que $a_j > d_k$ $\forall k \in C$, com $k \neq j$; para algum $q \in A$ faça $d_q = a_j$ e $a_j \leq d_k$ $\forall k \in A$. Claramente $p(\beta)=a_j$ e $w_j=0$. Então, declarar $b_j > a_j$ fará com que j preencha a sua cota e tenha um *payoff* negativo. Logo, $y_j w_j > y'w'_j$.

Caso 2. $n=mc$. Então todos os compradores preencherão a sua cota independentemente do seu lance e todos os objetos serão vendidos. Defina $\beta=(a_j, d_{-j})$ tal que $b_j < d_k$ $\forall k \neq j$. Temos então que $a_j < b_j < d_k$ $\forall k \neq j$. Logo, $p_*(\beta)=p_*(\beta')=0$, $p^*(\beta)=a_j$ e $p^*(\beta')=b_j$. Por hipótese, $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$, com $\lambda \in [0,1)$. Assim, $p(\beta)=(1-\lambda)a_j$ e $p(\beta')=(1-\lambda)b_j$ com $\lambda \in [0,1)$. Portanto, $1-\lambda>0$. Logo, $p(\beta')>p(\beta)$, e o resultado desejado segue.∎

Teorema 2. *Considere o leilão de regra de preço $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$, com $\lambda \in [0,1)$. Suponha que $r_j=c$ $\forall j \in P$. Além disso n é um múltiplo de c. Seja $j \in p$ e b_j uma estratégia de j. a) Se $n=mc$ então $b_j=0$ é não dominada. b) Se $n=tc$, t inteiro positivo e $t<m$, então $0 \leq b_j < a_j$ é não dominada.*

Demonstração. Seja $p(.),x(\ ))$ uma regra de leilão. Mostraremos que para toda estratégia $b'_j \neq b_j$, existe uma estratégia conjunta dos outros jogadores, d_{-j}, com $\beta \equiv (b_j, d_{-j})$ e $\beta' \equiv (b'_j, d_{-j})$ tal que $x_j(\beta)U_j(\beta, x(\beta)) > x_j(\beta')U_j(\beta', x(\beta'))$. Denotemos $x(\beta) \equiv x$ e $x(\beta') \equiv x'$

a) Seja $b'_j > b_j = 0$. Defina d_{-j} tal que $d_k > 0$ $\forall k \neq j$. Como $n=mc$ temos que $x_j = x'_j = c$. Pela Proposição 3*-iii) temos que $p_*(\beta)=p^*(\beta)=0$ donde $p(\beta)=0$. Temos também que $p_*(\beta')=0$. Como todos os lances da estratégia conjunta β são positivos, a Proposição 3*-iii) implica que $p^*(\beta')>0$. Portanto, $p(\beta')=(1-\lambda)p^*(\beta')>0$. Logo, $p(\beta)<p(\beta')$. Temos então que $x_j U_j(\beta, x) = c(a_j - p(\beta)) > c(a_j - p(\beta')) = x'_j Uj(\beta', x')$.

b) Vamos mostrar inicialmente que o resultado é válido para toda $b'_j \neq b_j$, com $0 \leq b'_j \leq a_j$. Seja A um conjunto com t compradores contendo j e C um conjunto com $(m-t)$ compradores, A e C disjuntos e não vazios. (É possível pois $m>1$).

Caso 1. $b'_j < b_j < a_j$.

Então existe $\rho_1 > 0$ tal que $b'_j < \rho_1 < b_j$. Tome $q \in C$. Defina d_{-j} tal que $d_q = \rho_1$, $b_j < d_k$ $\forall k \in A$, $k \neq j$, e $d_q > d_k$ $\forall k \in C$. Claramente $A = A_x$ e $C = C_x$. Declarando $b'_j < \rho_1 = d_q$, q é deslocado para $A_{x'}$ e j para $C_{x'}$. Então, $x'_j U_j(\beta', x')=0$. Por outro lado, $p_*(\beta)=\rho_1$ e $p^*(\beta)=b_j$. Assim, $p(\beta)=\lambda\rho_1+(1-\lambda)b_j \leq b_j$, donde $x_j U_j(\beta, x)=c(a_j - p(\beta)) \geq c(a_j - b_j) > 0 = x'_j U_j(\beta', x')$. Logo, $x_j(\beta)U_j(\beta, x(\beta)) > x_j(\beta')U_j(\beta', x(\beta'))$, como queríamos demonstrar.

Caso 2. $b_j<b'_j\leq a_j$.

Defina d_{-j} tal que $d_k>b'_j$ $\forall$ $k\in A$, $k\neq j$, e $b_j>d_k$ $\forall$ $k\in C$. É fácil ver que $x_j=x'_j=c$, $A=A_x=A_{x'}$ e $C=C_x=C_{x'}$. Da construção de d_{-j} decorre que $p_*(\beta)=p_*(\beta')$ e $p^*(\beta)=b_j$, $p^*(\beta')=b'_j$. Assim, $p(\beta)=\lambda p_*(\beta)+(1-\lambda)b_j<\lambda p_*(\beta')+(1-\lambda)b'_j=p(\beta')$. Logo, $x_jU_j(\beta,x)=c(a_j-p(\beta))>c(a_j-p(\beta'))=x'_jU_j(\beta',x')$, donde $x_j(\beta)U_j(\beta,x(\beta))>x_j(\beta')U_j(\beta',x(\beta'))$, como queríamos demonstrar.

Dessa forma mostramos que o resultado vale para toda $b'_j\neq b_j$, com $0\leq b'_j\leq a_j$. Em particular para $b'_j=a_j$. Assim existe uma estratégia conjunta dos outros jogadores, d_{-j}, com $\beta\equiv(b_j,d_{-j})$ e $\beta''\equiv(a_j,d_{-j})$ tal que

$$x_j(\beta)U_j(\beta,x(\beta))>x_j(\beta'')U_j(\beta'',x(\beta'')). \tag{1}$$

Suponha agora que $b'_j>a_j$. Pelo Teorema 1, b'_j é fracamente dominada por a_j. Isto significa que para toda estratégia conjunta c_{-j}, com $\alpha=(a_j,c_{-j})$ e $\alpha'=(b'_j,c_{-j})$, temos que $x_j(\alpha)U_j(\alpha,x(\alpha))\geq x_j(\alpha')U_j(\alpha',x(\alpha'))$. Em particular para a estratégia conjunta d_{-j} dada acima, com $\beta''\equiv(a_j,d_{-j})$ e $\beta'\equiv(b'_j,d_{-j})$,

$$x_j(\beta'')U_j(\beta'',x(\beta''))\geq x_j(\beta')U_j(\beta',x(\beta')) \tag{2}$$

Por (1) e (2) segue que $x_j(\beta)U_j(\beta,x(\beta))>$ $x_j(\beta)U_j(\beta,x(\beta))$, e a demonstração está completa.∎

O Teorema 3 analisa os casos restantes.

Teorema 3. *Suponha que* $r_j=c$ $\forall$ $j\in P$. *Seja* $n=tc$, *t inteiro positivo e* $t<m$. *Seja* $j\in P$. *Então:*

i) se $m>2$, a_j *é* ***não dominada*** *em qualquer leilão de regra de preço* $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$, *com* $\lambda\in[0,1;)$

ii) se $m=2$ *então* a_j *é* ***não dominada*** *em qualquer leilão de regra de preço* $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$, *com* $\lambda\in(0,1)$ *e*

iii) se $m=2$ *então* a_j *é* ***dominada fracamente*** *por qualquer estratégia* $b'_j<a_j$ *em qualquer leilão de regra de preço* $p^*(\ )$.

Demonstração. Seja $(p(.),x(.))$ uma regra de leilão. i) Mostraremos que para toda estratégia $b'_j \neq a_j$, existe uma estratégia d_{-j}, com $\beta \equiv (a_j, d_{-j})$ e $\beta' \equiv (b'_j, d_{-j})$ tal que $x_j(\beta)U_j(\beta, x(\beta)) > x_j(\beta')U_j(\beta', x(\beta'))$. Só precisamos analisar o caso em que $b'_j < a_j$, visto que caso contrário b'_j é fracamente dominada por a_j, pelo Teorema 1. Então seja $b'_j < a_j$. Seja A um conjunto com t compradores contendo j e C um conjunto com $(m\text{-}t)$ compradores, A e C disjuntos e não vazios. (É possível pois $m>1$). Então existem $\rho_1>0$ e $\rho_2>0$ tal que $b'_j<\rho_1<\rho_2<a_j$. Tome j, $k \in A$, $k \neq j$ e $q \in C$. (Aqui estou usando que $m>2$). Defina d_{-j} tal que $d_k=\rho_2$, $d_q=\rho_1$, $d_k<d_{k'}$ $\forall\, k' \in A$, $k' \neq j$ e $d_q>d_{k'}$ $\forall\, k' \in C$. Claramente $A=A_x$ e $C=C_x$. Declarando $b'_j < r_1 = d_q$, q é deslocado para $A_{x'}$ e j para $C_{x'}$. Então $x'_j U_j(\beta', x')=0$. Por outro lado, $p_*(\beta) = \rho_1$ e $p^*(\beta)=\rho_2$. Assim, $p(\beta)<a_j$, donde $x_j U_j(\beta,x)=c(a_j - p(\beta)) > c(a_j - a_j)=0=x'_j U_j(\beta', x')$. Logo, $x_j(\beta)U_j(\beta, x(\beta)) > x_j(\beta')U_j(\beta', x(\beta'))$, como queríamos demonstrar.

ii) Denotemos por k o outro jogador. Mostraremos que para toda estratégia $b'_j \neq a_j$, existe uma estratégia d_k, com $\beta \equiv (a_j, d_k)$ e $\beta' \equiv (b'_j, d_k)$ tal que $x_j(\beta)U_j(\beta, x(\beta)) > x_j(\beta')U_j(\beta', x(\beta'))$. Como anteriormente, só precisamos analisar o caso em que $b'_j<a_j$. Defina então d_k tal que $a_j>d_k>b'_j$. Como $\lambda \neq 0$ implica que $p(\beta)<p^*(\beta)$. É fácil ver que submetendo a_j o comprador j preenche a sua cota pagando $p(\beta)<p^*(\beta)=a_j$, o que lhe garante um *payoff* positivo, enquanto submetendo b'_j ele não recebe nenhum objeto, e o resultado desejado segue.

iii) Seja $b'_j<a_j$. Seja c_k uma estratégia do jogador k. Denotemos $\alpha \equiv (a_j, c_k)$ e $\alpha' \equiv (b'_j, c_k)$. Queremos mostrar que $x_j(\alpha')U_j(\alpha', x(\alpha')) \geq x_j(\alpha)U_j(\alpha, x(\alpha))$ e que para alguma estratégia d_k, com $\beta=(a_j, d_k)$ e $\beta'=(b'_j, d_k)$ temos $x_j(\beta')U_j(\beta', x(\beta')) > x_j(\beta)U_j(\beta, x(\beta))$. De fato, se $x_j(\alpha)=0$ então devemos ter $d_k \geq a_j > b'_j$. Neste caso $x_j(\alpha')=0$ e j tem *payoff* 0 com ambas as estratégias. Se $x_j(\alpha)=c$ então $p^*(\alpha)=a_j$ e portanto j terá *payoff* 0. Como $b'_j<a_j$ o comprador j terá garantido um *payoff* de no mínimo 0. Assim, $x_j(\alpha')U_j(\alpha', x(\alpha')) \geq x_j(\alpha)U_j(\alpha, x(\alpha))$.

Finalmente, defina d_k tal que $a_j>b'_j>d_k$. É uma questão de verificação que $x_j(\beta')U_j(\beta', x(\beta')) > x_j(\beta)U_j(\beta, x(\beta))$.∎

5 Equivalência de *payoffs*

Nesta seção retornamos às regras de desempate $x(.)$ conforme definidas na seção 3. Podemos facilmente construir exemplos de equilíbrios de Nash com estratégias dominadas, cujas alocações de equilíbrio são diferentes do equilíbrio competitivo mínimo. O Teorema 4 mostra que se para algum jogo de leilão de regra de preço diferente do preço mínimo de equilíbrio os jogadores jogam estratégias não dominadas fracamente então a alocação de equilíbrio de Nash é sempre o equilíbrio competitivo mínimo. Lembrando que pelo Teorema 1* a estratégia sincera é dominante em qualquer leilão de regra de preço mínimo de equilíbrio, um teorema de equivalência de *payoffs* (Teorema 5) é então obtido.

Teorema 4. *Seja* $(p(.),x(.))$ *uma regra de leilão com* $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$, $\lambda\in[0,1)$. *Suponha que* $r_j=c$ $\forall$ $j\in P$. *Além disso* $n>mc$ *ou* n *é um múltiplo de* c. *Se* b *é um equilíbrio de Nash para o jogo de regra* $(p(.),x(.))$ *e* b_j *não é dominada* $\forall$ $j\in P$ *então* p_* *é o preço obtido quando os compradores selecionam* b.

Demonstração. Seja $(p(.),x(.))$ uma regra de leilão com $p(.)$ diferente da regra de preço mínimo de equilíbrio. Se b é um equilíbrio de Nash para $(p(.),x(.))$, $|E(b)|=1$ pelo Teorema 3* Conseqüentemente $p(b)=p^*(b)=p_*(b)$. Se $m=1$ então $p_*(b)=p_*=0$ e $p^*(b)=b_1$. Logo o único equilíbrio de Nash é $b_1=0$, que como já foi observado, é não dominada, e $p(b)=p_*$. Consideremos então que $m>1$.

Caso 1. $n=tc$, t inteiro, $t<m$. Então $C_x\neq\phi$ e portanto $\max\{b_k;\ k\in C_x\}=\min\{b_k;\ k\in A_x\}=p(b)$. Seja $j\in C_x$ tal que $b_j=p(b)$. Pela Proposição 3*-iii), temos que $(p(b),x)$ é um equilíbrio competitivo para M, donde $p(b)\geq p_*$ e $x\in\Sigma(M)$. Como $j\in C_x$, segue da Definição 3 que $p_*\geq a_j$. Portanto, $a_j\leq p(b)=b_j$. Mas, por hipótese b_j é não dominada. Logo, pelo Teorema 1, não pode ser o caso em que $b_j>a_j$. Portanto, $p(b)=a_j=p_*$, e o resultado desejado segue.

Caso 2. $n=mc$. Então $C_x=\phi$ e todos os objetos são vendidos. Portanto, pela Proposição 3*-iii), $p_*(b)=0$ e $p^*(b)=\min\{b_k;\ k\in P\}$. Seja $b_j=p^*(b)$. Para que b seja um equilíbrio de Nash devemos ter $p(b)=0=b_j$. É fácil ver que se $b_j=0$ então b é um equilíbrio de Nash, independentemente das estratégias dos outros jogadores. Pela competitividade de $(p(b),x)$ em M segue que $0=p(b)\geq p_*\geq 0$, donde $p(b)=p_*$ Então qualquer estratégia b, com $b_j=0$ é um equilíbrio de Nash com $p(b)=p_*$. Em particular, $p(b)=p_*$ quando as estratégias dos jogadores são não dominadas.

Caso 3. Se $n>mc$ então $C_x=\phi$ e $n-mc$ objetos não são vendidos. Portanto, pela Proposição 3*-iii), todos os compradores preenchem suas cotas em qualquer leilão, independentemente dos lances que submeterem e pagam 0. Assim, $p(b)=p_*=0$, e, como foi observado na seção anterior, todo lance b é um equilíbrio de Nash em estratégias não dominadas.

Em qualquer dos casos temos que $p(b)=p_*$, o que completa a demonstração.∎

Pelo Teorema 4, os compradores podem forçar o preço mínimo de equilíbrio de M via equilíbrios de Nash de estratégias não dominadas. O Teorema 1* diz que o preço mínimo de equilíbrio é o preço obtido em qualquer leilão com regra de preço $p_*(.)$ se os compradores jogam suas estratégias dominantes. Logo:

Teorema 5. (EQUIVALÊNCIA DE *PAYOFFS*) *Considere a classe de leilões com regra de preço* $p(.)=\lambda p_*(.)+(1-\lambda)p^*(.)$, *com* $\lambda\in[0,1]$. *Suponha que os compradores selecionem apenas equilíbrios de Nash com estratégias não dominadas. Suponha que* $r_j=c$ $\forall$ $j\in P$. *Além disso* $n>mc$ *ou* n *é um múltiplo de* c. *Então, em todos os leilões, o leiloeiro obtém o mesmo preço para os objetos e os compradores obtêm os mesmos payoffs.*

Referências

Crawford V. P e Knoer, E. L. Job matching with heterogeneous firms and workers. *Econometrica,* 49, p. 437-450, 1981.

Demange, G. e Gale, David. The strategy structure of two-sided matching markets. *Econometrica* 53, p. 873-83, 1985.

Demange, G. Strategyproofness in the assignment market game. *Laboratoire dÉconometrie*. Preprint. Paris: École Polytechnique, 1982.

Demange, G., Gale, David e Sotomayor, Marilda. Multi-item auctions. *Journal of Political Economy* 94, p. 863-872, 1986.

Leonard, Herman B. Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to positions. *Journal of Political Economy* 91, p. 461-79, 1983.

Osborne, M. e Rubinstein, Ariel. *A course in Game Theory*. The MIT Press, 1994.

Sotomayor, M. The multiple partners game, equilibrium and dynamics: essays in honor to David Gale. Editado por Majumdar, M.. Publicado por *Macmillian,* 1992, p. 322-336.

_______. Um simples mercado de compra e venda. *Revista de Econometria,*1999a.

_______. Estrutura estratégica de um simples mercado de compra e venda. Aceito para publicação na *Revista de Econometria*, 1999b.

Roth, A. e Sotomayor, Marilda. Two-sided matching. A study in game theoretic modeling and analysis. *Econometric Society Monograph Series*, n. 18, Cambridge University Press, 1990.

Vickrey, W. Counterspeculation, auctions and competitive sealed tenders. *J. Finance* 16, p. 8-37, 1961.