

## Passeio aleatório e filosofia de vida\*

Gerard Debreu<sup>§</sup>

### I

Assim como uma partícula desenvolve um passeio aleatório em um espaço de alta dimensão, um observador deve descobrir um subespaço no qual a projeção de seu caminho se aproxima de uma linha reta. O observador deve então ser seduzido a humanizar a partícula e acreditar que ela tem “*um sistema que uma pessoa modela para a conduta de vida.*”<sup>1</sup> Em uma inversão de papéis, um cientista ou um humanista, a quem é solicitado expor sua filosofia de vida, deve sentir-se inclinado a identificar-se com aquela partícula se ele está ciente dos muitos eventos casuais que moldaram sua carreira e do sistema rudimentar que ele idealizou para sua conduta no início da carreira.

Todo esse começo devo a um professor do ensino secundário que me proporcionou o primeiro lampejo da beleza austera da matemática, e às minhas primeiras experiências matemáticas. Por vários anos, Jules Dermie desafiou a engenhosidade da minha classe com os enigmas geométricos que estavam, então, no centro do currículo francês. Um assunto sedutor, apresentado por um mestre dedicado em um momento crítico do meu desenvolvimento intelectual, apontou-me, inconscientemente, a direção de uma carreira de

---

\* Este artigo está sendo publicado com a autorização do próprio autor e da Cambridge University Press. Originalmente, este texto, *Random Walk and Life Philosophy*, foi publicado em Michael Szemberg ed., *Eminent Economists. Their Life Philosophies*. Cambridge University Press, 1992.

§ Professor Universitário e Class de 1958 Professor, de Economia e de Matemática, Universidade da Califórnia em Berkeley. Prêmio Nobel de Economia em 1983.

Tradução do inglês: Sylvia M. S. Cristovão dos Santos.

1 *A New English Dictionary on Historical Principles*, vol. 7, pt. 2, James A. H. Murray, ed., “Philosophy, 9.a” (Oxford: Clarendon Press, 1909).

pesquisa científica. A oportunidade ocorreu novamente quando, em meu último ano do ensino secundário em Calais, um desestimulante professor de matemática e um estimulante professor de física, Albert Javelli, transferiu meu compromisso de lealdade do primeiro para o segundo assunto, e quando, ao final daquele ano, minha escola enviou-me para participar, na área de física, de uma das competições nacionais pela qual a França é apaixonada. Em 1939, o *Concours Général* era uma respeitável instituição datada da primeira metade do século XVIII, mas um ano antes Louis Mandel, depois de tornar-se ministro das colônias, tinha adicionado recompensas generosas ao valor simbólico de seus prêmios. Assim, ao final de agosto de 1939, em Bordeaux, embarquei em um navio com destino a Dakar. O programa incluía uma viagem de trem de Dakar para Bamako, um trajeto pelos meios mais primitivos para Abidjan e uma viagem marítima de retorno para Bordeaux. Uma experiência tão exótica e a percepção repentina das possibilidades inimaginadas que o futuro detinha teriam estimulado um adolescente, educado em uma cidade provinciana, se sua satisfação não tivesse sido dificultada pela tempestade que estava para cair sobre a Europa. Quando o navio chegou a Dakar, a Segunda Guerra Mundial tinha começado para a França. Navios de passageiros foram confiscados como transportes de tropa e a viagem de retorno foi feita vagorosamente em um cargueiro misto a vapor para Marseilles.

O próximo passo em minha trajetória, quando comecei a estudar para admissão em uma das *Grandes Ecoles*, não foi aleatório. Mas as condições para aquele primeiro ano de estudo teriam sido imprevisíveis umas poucas semanas antes. Um currículo improvisado tinha sido apresentado na pequena cidade de Ambert, em Massif Central. Lá, Joseph Coissard, um professor aposentado chamado de volta à ativa, transmitiu seu entusiasmo aos seus estudantes quando os introduziu no campo da matemática. O isolamento do noviciado em Ambert tornava possível esquecer freqüentemente que a França estava em guerra. Ele também fez com que a derrota, que encerrou o ano escolar, parecesse assombrosa.

Ingressar na *Ecole Normale Supérieure* no outono de 1941 significou outra iniciação, desta vez em ciência viva. Os três anos durante os quais estudei e vivi na *Ecole Normale* foram ricos em revelações. Nicolas Bourbaki estava começando a publicar seu *Eléments de Mathématique*, e seu grandioso plano para reconstruir todo o edifício da matemática mereceu adesão total e instantânea. Henri Cartan, que o representou na *Ecole Normale*, inflenciou-me então como nenhum outro membro da faculdade o fez.

O corpo estudantil de alguns cento e cinquenta homens formou um microcosmo que a pressão do mundo exterior sombrio de Paris, sob ocupação germânica, manteve em um estado de permanente implosão. A interação diária e a diversidade de suas áreas de estudo

em humanidades e ciências ajudaram a criar uma densa atmosfera intelectual que não experimentei novamente em outro lugar com a mesma intensidade. Outra experiência que permaneceu única foi viver em um estado totalitário que não concede qualquer direito aos seus súditos. Isso tornou o movimentar-se em Paris em 1943-44, sem documentos em perfeita ordem, um jogo de evasão com um alto *payoff*.

Os novos níveis de abstração e de pureza para os quais o trabalho de Bourbaki estava levando a matemática tinham adquirido um respeito que não devia ser desconsiderado. Mas, ao final de 1942, comecei a questionar se estava pronto para um total compromisso com uma atividade tão desligada do mundo real, e durante o ano seguinte explorei várias alternativas. Economia foi uma delas. Em 1943-44, o ensino do tema em universidades francesas prestou pouca atenção à teoria e o primeiro livro de texto que me propus a ler refletiu essa negligência. A distância entre o enfoque vulgar que fui convidado a seguir e o vôo sempre mais alto que vinha alçando por vários anos parecia imensa, talvez irreduzível. A razão recomendava a retirada para um caminho seguro. O que me fez persistir? O sentimento desejoso de que o fim da guerra estivesse próximo e a percepção de que os economistas tinham uma contribuição a dar na tarefa de reconstrução que deveria seguir? Um evento improvável deu fim à minha busca. Maurice Allais, cuja *A la Recherche d'une Discipline Economique* tinha surgido em 1943, enviou cópias de seu livro a vários presidentes de classe da *Ecole Normale*. Um deles, Jacques Bompaire, sabia de meu interesse na aplicação da matemática para a economia, um interesse do qual, como um helenista, ele não participava. Na cópia que me deu na primavera de 1944 descobri a teoria do equilíbrio geral econômico e uma vocação científica.

Mas vários anos passariam até que um observador de minha delirante trajetória pudesse acreditar que ainda não tomaria outra direção. Como o fim da guerra estava se aproximando, o exército francês deu-me a oportunidade única de experimentar a vida fora do casulo acadêmico. Então, em 1945-46, tive que passar pelo exercício acadêmico da *agrégation de mathématiques*, que se tornou particularmente fora de propósito, dada a minha nova visão. Depois disso, estava claro o caminho para a conversão da matemática para a economia, o que o Centro Nacional de Pesquisa Científica tornou possível por sua tolerância com a ausência de resultados de um de seus pesquisadores. Em 1948, num momento crítico de bifurcação, a oportunidade ocorreu na sua forma mais pura. A Fundação Rockefeller tinha destinado uma bolsa de estudo a um jovem economista francês. Maurice Allais, cuja recomendação era decisiva, colocou juntos em seu escritório os dois candidatos, Marcel Boiteux e eu, e sugeriu que uma moeda escolhesse entre nós. O ganhador passaria o ano de 1949 nos Estados Unidos e o perdedor, o de 1950. A moeda rodopiou sobre uma mesa por um longo tempo e eventualmente decidiu que eu deixaria Paris ao final

de 1948. Mas antes disso, minha visita aos Estados Unidos foi preparada por um verão no *Salzburg Seminar in American Studies*. Com Wassily Leontief e Robert Solow aprendi sobre desenvolvimentos em economia, dos quais a França tinha estado à margem, e na biblioteca da *Schloss Leopoldskron* comecei a ler *Theory of Games and Economic Behavior*.

A bolsa de estudo da Fundação Rockefeller, que ganhei em um jogo de cara e coroa, proporcionou-me um *tour* pelas universidades americanas em 1949, e para Uppsala e Oslo nos primeiros quatro meses de 1950. Meu caminho foi orientado para outro ponto central em Chicago, no outono de 1949, quando Tjalling Koopmans, então diretor de pesquisa da Comissão Cowles, convidou-me para fazer parte de seu grupo.

## II

Logo depois de minha associação com Cowles, em primeiro de junho de 1950, a metodologia que se tornou explícita uns poucos anos depois começou a delinear-se. Um princípio central era o respeito pelo rigor matemático em teoria econômica.

No começo dos anos cinquenta, a tolerância dos economistas matemáticos em aproximar-se do rigor em sua área tentava fortemente alguém a passar por cima de problemas técnicos chatos, e aparentemente insignificantes, e a *Econometrica* publicava então artigos que hoje não passariam por seus pareceristas. Neste clima, foi fácil extraviar-me do caminho restrito que tinha seguido até meu estudo formal de matemática, concluído em 1946. Em contraste, a Comissão Cowles, ao dar as boas-vindas a uma disciplina intelectual rigorosa, estimulou a que se olhasse a teoria econômica do ponto de vista de um matemático. Uma motivação mais forte veio da natureza de dois problemas sobre os quais comecei a trabalhar. O primeiro foi a existência de uma função utilidade, representando uma relação de preferência. O segundo, a existência de um equilíbrio econômico geral. Em qualquer dos dois casos, a solução proposta não teria sentido se uma imperfeição irremediável invalidasse o argumento que sustentava que suas hipóteses garantiam a existência.

A lealdade ao rigor tinha muitas recompensas. Propiciava escolher os instrumentos matemáticos mais apropriados para cada questão particular de teoria econômica. Tomando a postura inflexível de um matemático, participava-se em seus *insights* no comportamento dos objetos matemáticos, em seu esforço por hipóteses sempre mais fracas e conclusões sempre mais fortes e em sua busca compulsiva pela simplicidade.

Os estudos sobre economia do bem-estar por meio da análise convexa, que Kenneth Arrow e eu publicamos separadamente em 1951, já tinham deixado uma marca particular duradoura sobre esses pontos. Em 1950, a caracterização do ótimo de Pareto tinha sido o assunto de uma extensa literatura cuja dependência do cálculo diferencial apresentava várias inconveniências. As hipóteses de diferenciabilidade sobre as quais se apoiou não deixaram espaço, por exemplo, para consumidores que não consomem algumas mercadorias. Nem para produtores cujas tecnologias são geradas por um número finito de processos elementares. A análise alternativa por meio de convexidade mostrou que aquelas hipóteses perturbadoras eram supérfluas em uma prova do segundo teorema da economia do bem-estar que pode ser resumida em dois passos. Dada uma alocação ótima de Pareto do vetor recursos e de uma economia, defina-se o conjunto  $E$  no espaço de mercadorias pela adição dos conjuntos preferidos de todos os consumidores e pela subtração dos conjuntos de produção de todos os produtores. Um hiperplano  $H$  através do ponto  $e$ , sustentando o conjunto  $E$ , produz um vetor de preço intrínseco ortogonal a  $H$ . A derivação assim obtida foi, ao mesmo tempo, mais simples e mais perspicaz, mais geral e mais rigorosa.

Um reforço poderoso foi proporcionado pelos dois problemas de existência cujas soluções não toleravam improvisos com o rigor. O primeiro deu origem à primeira de uma série de artigos sobre preferência, utilidade e teoria da demanda. O objetivo daquele artigo inicial foi delinear as condições topológicas sobre o espaço de ações de um agente, implicando que uma relação de preferência rigorosa pode ser representada por uma função de utilidade contínua. O segundo acabou levando ao artigo sobre a existência de um equilíbrio geral que Kenneth Arrow e eu publicamos juntos, em 1954, depois de ter trabalhado independentemente sobre aquela questão, até que Tjalling Koopmans nos colocou juntos. O artigo baseava-se na apresentação de um modelo de equilíbrio geral como um ponto fixo de Kakutani. Mas, inicialmente os conceitos de uma economia e do equilíbrio geral tinham que ser definidos com a precisão que uma prova de existência requer. O reexame da teoria de equilíbrio geral que foi efetuado deve ser creditado a essa busca de rigor.

O desenvolvimento da matematização da teoria do equilíbrio geral vinha lhe dando uma forma axiomática na qual a estrutura da teoria podia ser inteiramente divorciada de suas interpretações. O valor dessa axiomatização foi ilustrado quando Arrow concebeu a idéia de uma mercadoria contingente cuja entrega está condicionada a um estado específico da sociedade. Num trabalho que escrevi na *Eletrecité de France* em 1953, e que elaborei como o último capítulo do meu *Teoria do Valor*, uma teoria do equilíbrio geral sob incerteza, formalmente idêntica à teoria sob condições de certeza, foi obtida via reinterpretção do conceito de mercadoria, seguindo aquela idéia.

A Comissão Cowles proporcionou um ambiente ideal para pesquisar esses problemas. O trabalho de cada membro era de interesse de todos os outros. Oportunidades para interação surgiam a cada semana em encontros do *staff* e quinzenalmente em seminários. O grupo compacto de salas, algumas das quais eram compartilhadas, criou muitas outras ocasiões para trocas de idéias. Mas o estado da profissão relativa à ciência econômica também ajudou. O pequeno número de artigos para ler e de seminários para assistir, e a escassez geral de interesse em enfoques matemáticos exatos proporcionaram liberdade para a escolha de problemas e de tempo para trabalhá-los.

### III

Quando os anos cinquenta estavam para terminar, a curva de contrato de Edgeworth foi recuperada de um esquecimento de quase oitenta anos por um artigo de Martin Shubik, que iniciou a teoria contemporânea do “*core*” de uma economia. Depois que Herbert Scarf provou a primeira extensão do teorema limite de Edgeworth, nos foi dada uma oportunidade para colaborar com outra generalização, no inverno de 1962, quando me transferi de New Haven para Berkeley e antes que ele deixasse Stanford por Yale. Desta breve interação resultou o artigo que publicamos em 1963. O estudo do “*core*” fez mais do que elucidar a função dos preços em gerar alocações de recursos de uma economia que são estáveis em relação à formação de coalizões. Levou à introdução das poderosas técnicas matemáticas em teoria econômica quando o conceito de um grande conjunto de pequenos agentes foi formalizado por meio da teoria da medida por Robert Aumann em 1964 e por meio de análise não-padronizada por Donald Brown e Abraham Robinson, em 1972. Também levou à definição de uma distância entre duas relações de preferência, dando um significado preciso à noção de suas similaridades por Yakar Kannai em 1970. A idéia propagada por Edgeworth em 1881, e há muito adormecida, tinha recentemente entrado em uma fase de crescimento explosivo e as soluções de vários problemas de teoria econômica progrediram rapidamente. Uma idéia de importância fundamental tornou-se clara pelo arcabouço teoria-medida quando a integração de uma família de conjuntos arbitrários sobre um espaço de agentes insignificantes passou a ser vista como produzindo um conjunto agregado convexo. Em vários resultados fundamentais para a teoria econômica, a convexidade era necessária somente para conjuntos agregados. Em grandes economias constituídas de pequenos agentes, as hipóteses de convexidade sobre suas características individuais poderiam, portanto, ser dispensadas. Karl Vind, também em 1964, apresentou aquela propriedade de agregação como uma consequência direta do teorema de Lyapunov.

A questão da determinação do equilíbrio geral tinha recebido respostas parciais sob a forma de vários teoremas de existência. Uma solução mais completa teria sido

proporcionada por condições adicionais que implicassem que existe exatamente um equilíbrio. Mas essas condições de unicidade global revelaram-se excessivamente exigentes. Exigir que cada equilíbrio fosse apenas localmente único não era um enfraquecimento suficiente, já que se pode apresentar, na caixa de Edgeworth, uma economia com um contínuo de equilíbrios, muito embora cada um dos seus agentes seja do ponto de vista matemático excessivamente bem-comportado. Assumindo um ponto de vista genérico, entretanto, pode-se mostrar que quase toda economia diferenciável tem um conjunto de equilíbrios localmente únicos. O fundamento da prova foi o teorema de Sard sobre o conjunto de valores críticos de uma função diferenciável, que aprendi ao final dos anos sessenta, no meu primeiro encontro com Steve Smale, cuja trajetória manteve-se separada da minha durante o período de turbulência no *campus* que se iniciou em setembro de 1964. Suposições sobre diferenciabilidade que tinham sido expurgadas anteriormente da teoria econômica, pois eram, então, irrelevantes, eram agora essenciais para a descontinuidade genérica do conjunto de equilíbrios. Um dos subprodutos para o estudo dessas suposições foi uma reconsideração do problema de representação de uma relação de preferência por uma função de utilidade diferenciável. Uma alternativa à abordagem usual, via condições de integrabilidade de Frobenius, foi proposta num artigo de 1972, no qual eu defini uma relação de preferência diferenciável por meio da exigência de que pares indiferentes de vetores de mercadorias formam um múltiplo diferenciável.

O conceito de função de excesso de demanda agregada de uma economia e suas propriedades são essenciais para a teoria do equilíbrio geral. Numa economia de trocas, o excesso de demanda individual de um consumidor é uma função  $f$  dos preços, obtida pela subtração do seu vetor de dotação do vetor de mercadorias que ele demanda. Sob as suposições habituais sobre suas preferências, (1)  $f$  é contínua, e (2) para cada vetor de preços  $p$ , o valor  $p \cdot f(p)$  de  $f(p)$  relativo a  $p$  se anula. Visto que essas duas propriedades são preservadas pela soma sobre um conjunto de consumidores, a função de excesso de demanda agregada  $F$  da economia também tem as propriedades (1) e (2). Em 1972 e 1973, Hugo Sonnenschein conjecturou que, inversamente, qualquer função  $F$ , satisfazendo (1) e (2), pode ser escrita como a soma das funções de excesso de demanda individuais geradas pelas preferências tradicionais, e fez o primeiro ataque ao problema que ele apontava. A prova dada por Rolf Mantel, em 1974, baseava-se nas suposições de diferenciabilidade. Ela foi seguida, no mesmo ano, por uma outra prova na qual eu abria mão da diferenciabilidade e caracterizava a função de excesso de demanda agregada de uma economia de trocas por meio de uma decomposição aditiva com o número mínimo de consumidores. A escassez de propriedades da função de excesso de demanda agregada, expressada por este resultado, lançou uma forte luz sobre vários aspectos dos modelos de equilíbrio geral. Mas também sugeriu dotá-los de uma estrutura mais rica pela imposição de restrições sobre a distribuição das características dos agentes. Um passo significativo

nesta direção foi dado por Werner Hildenbrand em 1963 no seu estudo sobre a Lei da Demanda.

Deixando a Comissão de Cowles para a Universidade da Califórnia, ao final de 1961, fiz uma mudança para um novo ambiente que provou ser mais do que um outro estimulante poderoso para pesquisa. Ela ampliou minha experiência docente que até então tinha se limitado aos cursos especializados de pós-graduação. Dimensões essenciais foram adicionadas por uma sucessão excepcional de estudantes de doutorado e de colegas mais jovens, e descobri que havia prazer em lecionar para alunos de graduação.

#### IV

Na fase de crescimento exuberante que a economia matemática entrou em 1944, o exame minucioso de seus detalhes algumas vezes obscureceu suas características dominantes. Focalizá-los na análise do equilíbrio geral enfatiza, como um de seus temas centrais, o estudo da função múltipla de preços - notavelmente seus papéis na eficiência da alocação de recursos, na igualdade de demanda e oferta e na estabilidade de alocações com respeito à formação de coalizão. Explicar essas funções levanta questões científicas maiores. Qualquer tentativa de respondê-las deve levar em conta o grande número de agentes, o grande número de mercadorias e preços e a interdependência das muitas variáveis envolvidas. Somente um modelo matemático pode tratar essas características. Uma vez que seja formulado esse modelo, apelar para o raciocínio dedutivo requer um conjunto explícito de hipóteses como seu fundamento. Essas hipóteses delimitam o domínio de validade da teoria que nelas está baseada. A um dado momento no desenvolvimento da análise econômica elas são o resultado de um processo cumulativo contínuo de enfraquecimento.

Desta perspectiva, entrar em controvérsia sobre os méritos e deméritos da teoria do equilíbrio econômico geral tem pouca prioridade em contraste com a participação em sua construção. Nesta tarefa, a forma matemática contribui poderosamente para definir uma filosofia de análise econômica cujo princípio maior inclui rigor, generalidade e simplicidade. Ela comanda a longa busca pelos caminhos diretos mais seguros das hipóteses para as conclusões. Dita seu código estético e impõe sua linguagem concisa. Outro princípio desta filosofia é o reconhecimento e a aceitação dos limites da teoria econômica, a qual não pode atingir uma grandiosa explicação unificada dos fenômenos econômicos. Em vez disso, adiciona *insights* à percepção das áreas para as quais dirige sua busca. Quando são conquistados pela aceitação de desafios matemáticos, estes *insights* são as maiores recompensas perseguidas por um economista matemático.