

Algumas evidências da presença de não-linearidades compatíveis com caos determinístico no IBOVESPA na década de 1990

Newton Paulo Bueno[§]

RESUMO

O objetivo do trabalho é obter indícios da presença de dinâmica caótica determinística na evolução do IBOVESPA entre os anos de 1978 e 2000. Este tipo de dinâmica, como se sabe, implica que a série apresentará um alto grau de sensibilidade em relação a variações nas condições iniciais, mas não um comportamento aleatório. As técnicas utilizadas foram a do diagrama de recorrência e a de filtragens sucessivas com modelos auto-regressivos do tipo ARCH, capazes de modelar a heterocedasticidade condicional, seguidas por testes realizados por meio da estatística BDS. O resultado obtido foi a identificação de evidências da presença de dinâmica caótica na evolução do IBOVESPA durante alguns períodos da década de 1990.

Palavras-chave: dinâmica não linear, mercado de ações, teoria do caos.

ABSTRACT

The purpose of the paper is to look for indications of chaotic dynamics in the monthly evolution of IBOVESPA in the period 1978/2000. This kind of dynamics, as it is known, implicates that the series will present high sensibility to variations in initial conditions, but not a random behavior. The techniques employed were the recurrence plot followed by successive filtering of the residuals by ARCH's type autoregressive models, capable to model the conditional heterocedasticity; the final step was to test the residuals against BDS statistics. The conclusion obtained after filtering the series was the identification of evidences of chaotic dynamics in the evolution of IBOVESPA during the 1990's.

Key words: non-linear dynamics, stock market, chaos theory.

JEL classification: C4.

§ Doutor em Economia e Professor do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Extensão Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: npbueno@ufv.br.

Agradeço os pertinentes comentários de Marcelo Arbex, que não tem, é claro, qualquer responsabilidade pelo texto final.

Recebido em agosto de 2001. Aceito em abril de 2002.

1 Introdução

Uma das expectativas que se criaram com as aplicações iniciais da teoria do caos à economia, a partir de meados da década de 1980, foi a de que algumas séries de tempo representativas da evolução de variáveis aparentemente estocásticas (depois de extraídos os componentes de tendência linear e de sazonalidade), como índices de preços de ações, poderiam apresentar um componente caótico determinístico até então não identificado. Supunha-se que, se cumprida essas expectativas, esse componente seria, pelo menos teoricamente, passível de previsão em períodos curtos, por meio de métodos não-lineares, como o de aproximações lineares locais, de análise espectral, dos vizinhos mais próximos, redes neurais, *splines* e outros (ver, por exemplo, Casdagli e Eubank, 1991, Herbst, 1992; Lebaron, 1992a, 1992b; Brock e Potter, 1993). O problema é que, à medida que as técnicas de detecção de não-linearidades foram sendo simultaneamente desenvolvidas, menos evidências convincentes de dinâmica caótica determinística foram encontradas em séries econômicas. Assim é que, por exemplo, frustraram-se as expectativas de que as séries macroeconômicas, como as de produção industrial e emprego, estivessem normalmente sujeitas a esse tipo de dinâmica. (Brock e Sayers, 1988; Frank e Stengos, 1988; Ramsey, Sayers e Rothman, 1990) Mesmo em séries onde os problemas de agregação e de obtenção de dados com a periodicidade necessária não eram tão limitantes para esse tipo de estudo, como nas séries de preços de ações, os resultados não têm sido muito melhores. Alguns dos trabalhos considerados clássicos no tema não encontraram evidência convincente de caos determinístico na evolução dos preços das ações na Bolsa de Valores americana (Hsieh, 1991), enquanto outros têm apresentado evidências apenas heurísticas deste padrão nessas séries. (Mayfield e Mizrach, 1992) Trabalhos recentes sobre o mercado de ações brasileiro, embora não concebidos para testar a presença de dinâmica caótica nos dados, confirmam os resultados internacionais, concluindo que modelos estocásticos de previsão de volatilidade da classe ARCH são capazes de reproduzir teoricamente vários fatos estilizados observados nas séries financeiras; isto é, concluem (implicitamente) não ser necessário recorrer às técnicas associadas à teoria do caos para apreender a dinâmica do mercado acionário brasileiro. (Herencia *et al.*, 1995; Morais e Portugal, 1999) Observe-se, entretanto, que tais modelos subestimam ou superestimam a verdadeira volatilidade para uma grande proporção dos retornos dos investimentos em ações (Herencia *et al.*, 1998), o que sugere a presença de um componente determinístico ou estocástico, mas modelável, remanescente não identificado.

O objetivo deste trabalho é mostrar que, diferentemente das conclusões obtidas pelos trabalhos acima mencionados, o emprego combinado de duas técnicas - o diagrama de recorrência e da filtragem progressiva da série de dados por meio de modelos do tipo ARCH,

testando os resíduos contra a estatística BDS (cujo significado será esclarecido à frente) - permite obter evidências sobre a presença de caos determinístico no mercado de ações brasileiro na década de 1990. Procurar-se-á mostrar especificamente que a técnica do diagrama de recorrência permite identificar os intervalos da série de dados onde a presença de dinâmica caótica é plausível e, portanto, identificar os períodos em que o processo de filtragem provavelmente não resultará em uma série de resíduo *white noise*, em que as estatísticas BDS não são significativas. Na seção seguinte do trabalho apresentam-se os elementos indispensáveis da teoria do caos para acompanhar a discussão posterior; na seção três descrevem-se os procedimentos metodológicos básicos adotados e, sucintamente, a técnica do diagrama de recorrência e o significado da estatística BDS. Na seção quatro identifica-se o período para o qual a série do IBOVESPA parece apresentar evidências de dinâmica caótica, de acordo com a técnica do diagrama de recorrência; nesta mesma seção testa-se essa possibilidade, filtrando-se os dados com modelos da classe ARCH, testando-se os resíduos com a estatística BDS. A seção 5 conclui o trabalho sugerindo que há evidências de caos determinístico na série diária do IBOVESPA entre 01/3/1990 e 30/12/98 e explicando a importância deste tipo de trabalho.

Alerta-se o eventual leitor que este trabalho restringe-se unicamente a tentar identificar não-linearidades na série do IBOVESPA compatíveis com caos determinístico. Portanto, foge completamente aos objetivos tentar especificar modelos de previsão, como os referidos no início dessa introdução. A identificação convincente de caos na evolução dos preços das ações é, entretanto, um passo preliminar indispensável para a eventual construção de modelos de previsão.

2 Elementos básicos da teoria do caos

Nesta seção apresentar-se-ão apenas os elementos essenciais da teoria para a compreensão do problema de pesquisa e da metodologia adotada; há inúmeros textos com graus variados de complexidade que fornecem uma visão geral sobre a questão, entre eles o clássico Gleick (1990) e o recente, e extremamente acessível, Gleiser (2002).

As duas características básicas da dinâmica caótica são: i) o fato de que trajetórias que se iniciam próximas umas das outras divergem completamente após um certo número de períodos e ii) a propriedade de que essa divergência, no entanto, circunscreve-se a um atrator no espaço de fases do sistema em questão. A primeira característica significa que o sistema em questão apresenta um ou mais expoentes de Lyapunov positivos e, a segunda, que ele apresentará baixa dimensão no espaço de fase.

Pode-se considerar os expoentes de Lyapunov como a taxa de divergência de trajetórias, como segue.

Seja o mapa unidimensional¹

$$X_{n+1} = F(X_n) \quad (1)$$

Assumam-se dois pontos iniciais x_0 e y_0 a distância entre eles

$$\delta = y_0 - x_0 \quad (2)$$

Suponha-se que depois de uma iteração a distância seja:

$$\delta' = y_1 - x_1 \quad (3)$$

De modo que se L mede a taxa exponencial de expansão entre as distâncias como resultado de uma iteração:

$$\delta' = e^L \delta \quad (4)$$

A equação (3) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \delta' &= F(y_0) - F(x_0) \\ &= F(x_0 + \delta) - F(x_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Usando (4) e (5) tem-se:

$$|F(x_0 + \delta) - F(x_0)| = |\delta| e^L$$

Além disso, iterando-se o mapa N vezes tem-se:

¹ O argumento pode ser facilmente generalizado para mapas de várias dimensões, mas para os objetivos desta seção o caso mais simples parece ser suficiente.

$$|F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)| = |\delta| e^{NL}$$

que pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)}{\delta} \right|$$

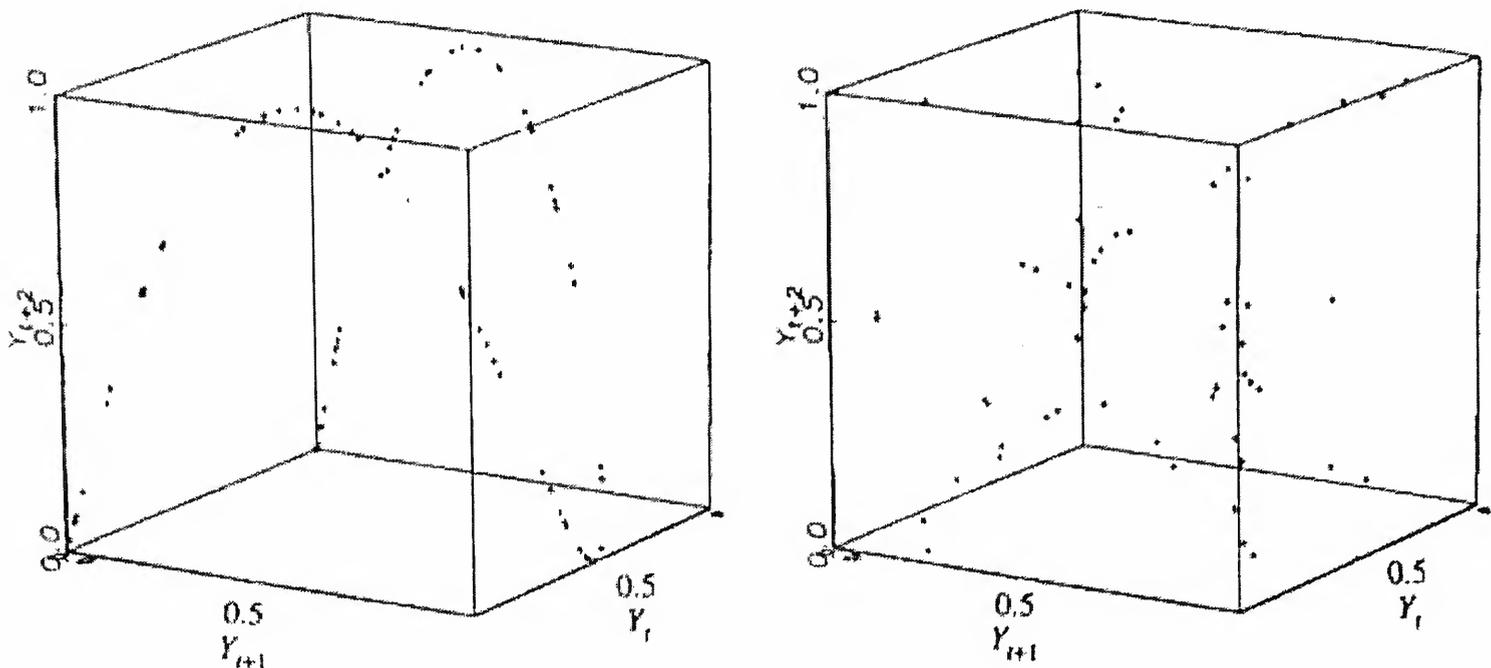
Como L depende de N e δ , considerando uma distância inicial infinitesimal depois de um número infinito de iterações tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) \equiv L(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)}{\delta} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(x_0)}{dx_0} \right| \end{aligned} \tag{6}$$

A expressão (6) é o expoente de Lyapunov. É imediato que valores desse expoente superiores a zero aumentam a divergência exponencial entre duas séries que partem de condições iniciais arbitrariamente próximas. Isto é, expoentes de Lyapunov maiores do que zero indicam que o sistema apresenta hipersensibilidade em relação às condições iniciais. Entretanto, para que sua dinâmica possa ser considerada caótica é necessário, como antes mencionado, que ele apresente estacionariedade, isto é, que a série de tempo que representa o sistema não seja simplesmente explosiva. Isto significa que a série tem que se desenvolver num espaço de fase limitado, o que, sob certas condições, pode ser demonstrado como significando que o atrator do sistema é de baixa dimensão: a segunda característica necessária para caracterizar um sistema sujeito à dinâmica caótica.

A Figura 1, a seguir, mostra uma série representativa de um sistema caótico (de baixa dimensão) e uma representativa de um sistema puramente estocástico. Observe-se que, diferentemente da primeira, a série estocástica ocupa integralmente o espaço tridimensional. Se fossem considerados retratos de fase de dimensão mais elevada, a série estocástica iria ocupar integralmente o espaço em cada uma dessas dimensões, enquanto que a série determinística permaneceria restrita ao espaço inicial.

Figura 1
Propriedades Dimensionais de Processos Caóticos e Processos Estocásticos



As técnicas do diagrama de recorrência e de teste contra a estatística BDS, descritas a seguir, permitem avaliar se uma série de tempo apresenta instabilidade e baixa dimensão no espaço de fase, isto é, permitem avaliar se a série pode estar representando a evolução de um sistema sujeito à dinâmica caótica.

3 Metodologia

3.1 Procedimentos básicos

A metodologia básica a ser empregada consiste em detectar, em primeiro lugar, as faixas onde parece mais plausível a ocorrência de dinâmica caótica na série mensal do IBOVESPA entre janeiro de 1978 e julho de 2000. Identificada a faixa na série de dados mensais em que a dinâmica caótica parece estar presente, adota-se o procedimento sugerido por Hsieh (1991) e empregado na maior parte dos estudos sobre detecção de caos no mercado de ações realizados posteriormente. Este procedimento consiste em filtrar a série, procurando-se eliminar três dos quatro tipos de dependência entre as observações, detectáveis pela estatística BDS: i) dependência linear; ii) não estacionariedade produzida por mudança estrutural na série de dados e; iii) dependência estocástica não-linear. O objetivo é obter séries de resíduos pós-filtragem do tipo ruído branco, como indicado pela estatística Q de Ljung-Box. Neste caso, não deveria haver mais qualquer padrão na série, e a estatística BDS deveria

ser não significativa. Se isso não ocorrer, isto é, se a estatística BDS for significativa mesmo após a eliminação desses três tipos de dependência entre as observações, pode-se concluir pela presença de não-linearidades compatíveis com a presença de caos determinístico na série do IBOVESPA.

3.2 Diagrama de recorrência e estatística BDS

A técnica do diagrama de recorrência foi concebida originalmente por Eckman *et al.* (1987) para detectar não-linearidades e, eventualmente, dinâmica caótica em sinais experimentais na física. Não se pode fazer aqui, evidentemente, uma revisão autocontida da já enormemente extensa literatura sobre dinâmica não-linear, caos e técnicas para detectá-los, mas é indispensável para os objetivos deste trabalho fornecer uma compreensão intuitiva do que se trata.

Séries de tempo representativas de sistemas sujeitos a dinâmicas altamente não-lineares apresentam-se aparentemente como processos estocásticos, em que as inovações são independente e identicamente distribuídas, isto é, têm média zero e variância constante. Em termos intuitivos, isso significa que as observações distribuem-se de forma aparentemente aleatória, não formando qualquer padrão identificável. O objetivo dos estudos em dinâmica não-linear, para os quais a técnica do diagrama de recorrência foi concebida, é tentar detectar padrões ocultos por trás dessa aparente aleatoriedade. No caso de sistemas sujeitos a dinâmicas caóticas, por exemplo, a aleatoriedade ocorre basicamente porque tais sistemas são altamente sensíveis em relação a variações em suas condições iniciais, mas restringe-se a certos limites. Embora o sistema seja imprevisível localmente, isto é, seja impossível prever o valor exato do estado que ele assumirá em qualquer ponto de sua trajetória futura a partir dos estados anteriores, pode-se identificar um padrão geral para a sua evolução de longo prazo. O exemplo mais conhecido é o famoso atrator de Lorenz para a evolução do clima, com suas estranhas asas de borboletas um pouco retorcidas, as quais restringem o espaço de fase em que o clima pode variar. O caos determinístico, em outras palavras, aparece quando o que parecia essencialmente arbitrário surge repentinamente organizado em um padrão geral identificável teórica e visualmente; isto é, o termo caos determinístico refere-se à dinâmica apresentada por alguns sistemas, que parece arbitrária, mas, na verdade, é produto de uma lógica altamente não-linear, em princípio identificável e passível de ser especificada matematicamente.

Sistemas não-lineares são sistemas que muitas vezes aparecem como “quase” caóticos, na medida em que são menos sensíveis em relação às condições iniciais, mas cujos padrões ou atratores, quando existem, não são óbvios, como os atratores de ponto fixo ou de ciclo limite. O diagrama de recorrência é uma técnica topológica (i.e., uma técnica que estuda a organização geral do atrator) simples de identificação de atratores dos sistemas altamente não-lineares.

A essência da técnica é demonstrar que as observações de uma série de tempo quase se repetem de tempos em tempos formando um padrão ou atrator. As observações podem, por exemplo, afastar-se de seus valores médios durante, digamos, vinte períodos, para novamente aproximar-se nos dez períodos seguintes, voltando a se afastar nos 18 ou 23 períodos seguintes. Se se conseguir identificar um padrão desse tipo, então forçosamente ter-se-á que admitir que existe uma lógica subjacente, em princípio identificável, que faz com que um pequeno afastamento do sistema de suas condições iniciais coloque em ação ciclos de realimentação positiva (*positive feedbacks loops*), contidos em algum momento por ciclos de realimentação negativa, que obrigam o sistema a voltar a convergir. Assim, um sistema altamente não-linear pode não ser explosivo, embora seja instável; não é também aleatório, uma vez que a probabilidade de um ponto qualquer de sua trajetória localizar-se no interior de seu atrator não é a mesma do que a de situar-se fora desse atrator, embora seja impossível muitas vezes prever sua trajetória exata.

O ponto de partida para implementar o algoritmo do diagrama de recorrência é a série de tempo $\{x_i\}$, no caso em questão a série do IBOVESPA médio mensal no período compreendido entre janeiro de 1978 e julho de 2000, considerando as observações isoladamente.² O passo seguinte é tornar a série estacionária, eliminando a tendência nos dados. Calculam-se a seguir os valores estimados $x_{i\ est}$, obtendo-se por resíduo os valores e_i . Se a tendência fosse a única força comandando a dinâmica da série do IBOVESPA, a série de erros e_i seria, então, independente e identicamente distribuída (IID), isto é, teria média zero e variância constante, e os erros seriam distribuídos aleatoriamente. Mas se não for esse o caso, ter-se-á períodos em que esses erros são sistematicamente pequenos, porque se uma observação ocorre próxima a uma órbita, a observação subsequente também o fará, seguidos por outros em que a divergência entre os valores observados aumenta substancialmente, porque a dinâmica é governada basicamente pela tendência de longo prazo e, portanto, os erros distribuem-se de forma aleatória. Para detectar as regiões onde um padrão oculto, além da tendência de longo prazo, está presente, computam-se todas as diferenças para cada observação x_i :

Se a diferença for superior a um certo valor (pequeno)³ ε , assinala-se um ponto preto no diagrama de recorrência; se for inferior, deixa-se em branco o espaço correspondente.⁴ O eixo horizontal do diagrama indica a observação de número i e o eixo vertical é designado para representar as observações x_i . Apenas para exemplificar, o diagrama a seguir (Figura 2),

2 Em termos mais técnicos, sem levar em conta uma dimensão de imersão.

3 Para efeitos práticos, adota-se como valor de referência inicial para ε o desvio padrão das observações dividido pela amplitude da série de tempo.

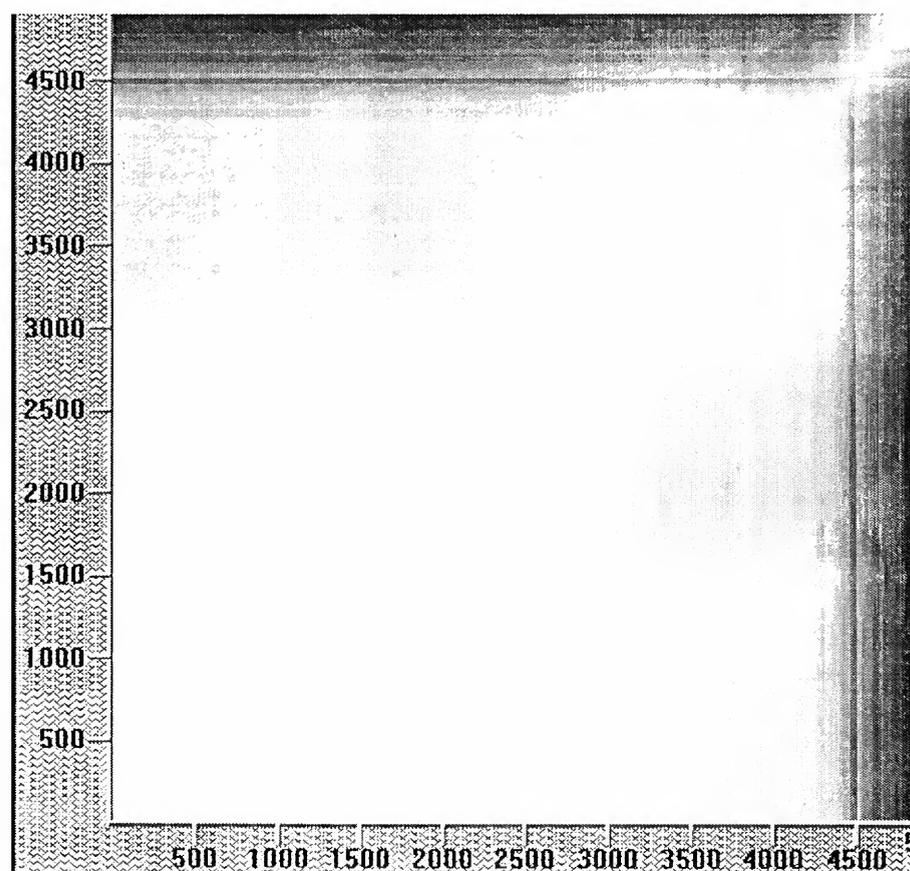
4 Isto é, fixa-se uma observação, por exemplo a primeira, e computa-se a diferença entre o valor desta primeira observação com os valores de todas as outras observações componentes da série.

construído com o *software Visual Recurrence Analysis*, desenvolvido por Kononov (1999) e a ser utilizado na seção seguinte do trabalho, representa 5000 observações diárias subseqüentes do índice Dow Jones:

Observe-se, em primeiro lugar, que os valores próximos à diagonal encontram-se em branco, o que significa que observações temporalmente próximas do índice refletem valores também próximos (até aproximadamente a observação de número 2700). Além disso, observa-se um primeiro padrão claro: os valores obtidos para várias observações subseqüentes estão bastante próximos (a diferença entre eles é pequena); assim, se o índice sobe em um dia, a tendência é que ele continue a subir no dia seguinte e no próximo. Esta faixa do diagrama aparece, portanto, como um grande quadrado branco. A partir daí, entretanto, esse padrão se desfaz, formando-se outro, representado pelo quadrado branco menor. As observações correspondentes relacionam-se entre si, mas não com as anteriores. Isto significa que a lógica que comanda a evolução do índice nesse período é diferente da do período anterior. Assim, se se deseja prever a evolução do índice, digamos, a partir da observação de número 3000, as informações contidas nas observações correspondentes ao primeiro quadrado branco serão inúteis, devendo ser utilizadas no modelo de previsão apenas as observações correspondentes ao segundo quadrado branco.

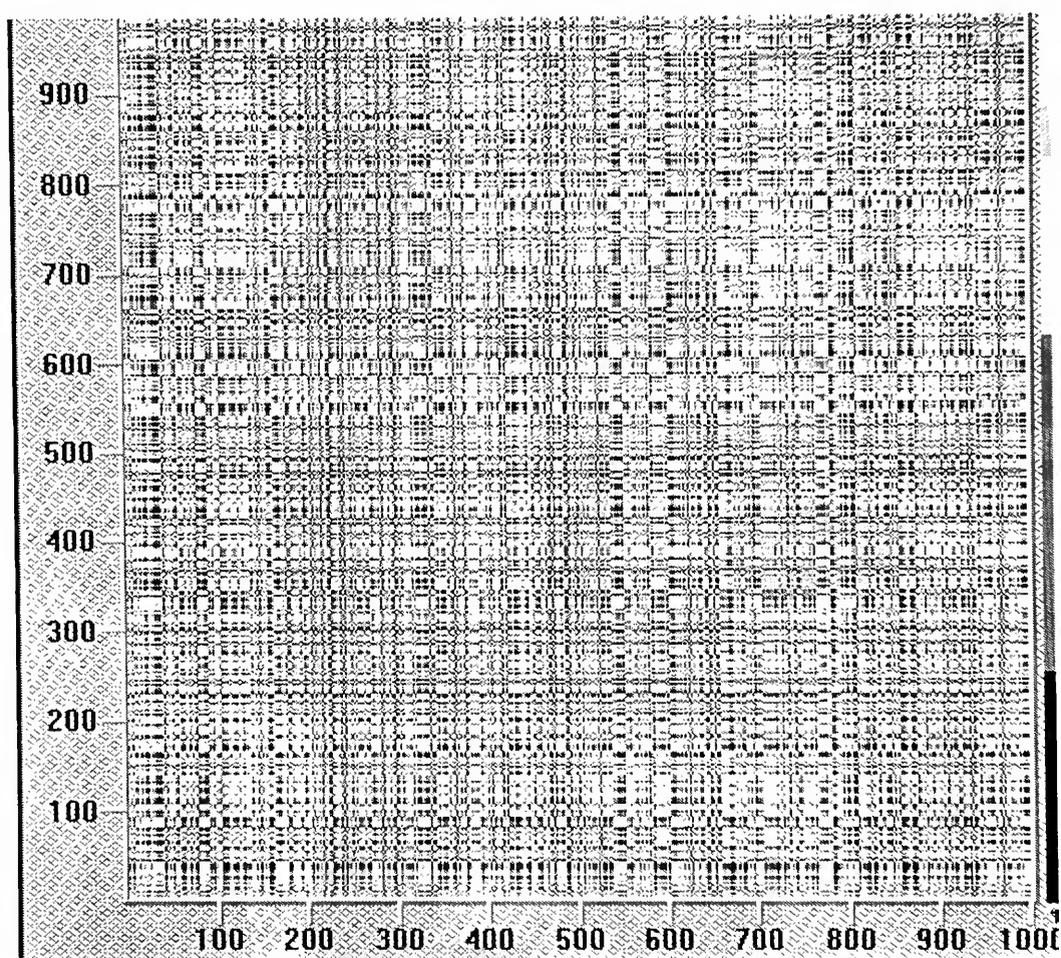
Figura 2

Diagrama de Recorrência para uma Série de Observações do Índice Dow Jones



O diagrama de recorrência permite, então, constatar a existência de dois períodos distintos na série temporal analisada, embora, evidentemente, não esclareça sobre o que provocou a mudança de padrão; mas, ao fazê-lo, fornece pistas importantes sobre o que, de fato, se precisa estudar por outros meios. Em particular, diz que existe realmente uma lógica governando a série (inclusive eventualmente dinâmicas não-lineares), a qual pode, em princípio, ser desvendada por análises teóricas e históricas. Não é o que acontece quando os dados se distribuem aleatoriamente, como representado no diagrama de recorrência de uma série independente e identicamente distribuída retratado na Figura 3. Neste caso, é impossível distinguir períodos, e qualquer exercício de previsão é inútil, simplesmente porque não há padrões a identificar.

Figura 3
Diagrama de Recorrência para uma Série Puramente Aleatória



O diagrama de recorrência é uma técnica de identificação de não-linearidades para a qual ainda não foi desenvolvida uma teoria estatística de erros padrões. Mas relaciona-se com outra técnica para a qual isso já foi feito. Trata-se da estatística BDS, desenvolvida por Brock, Dechert e Scheinkman (1987). Essa estatística, entretanto, diferentemente do diagrama de recorrência, só pode ser empregada de modo confiável para séries extensas, contendo no

mínimo 500, mas preferivelmente mais de 1000 observações. Uma vez identificado (com a técnica do diagrama de recorrência) o período em que a dinâmica caótica é plausível, pode-se então trabalhar com dados diários do IBOVESPA de modo a atender à exigência mínima de observações da estatística BDS.

A essência da técnica do diagrama de recorrência, como se viu, é mostrar que séries distribuídas de forma aparentemente aleatória apresentam, na verdade, uma ordem interna; isto é, ao invés de serem distribuídas ao acaso, as observações relacionam-se umas com as outras de forma muitas vezes não evidente, como quando existe um padrão não linear governando as séries. Para testar a existência desse padrão em uma série específica calculam-se as distâncias $|x_i - x_j|$ e avaliam-se os intervalos em que essa diferença é pequena formando os quadrados brancos detectados, por exemplo, na série do índice Dow Jones apresentada na subseção anterior.

A estatística BDS parte do mesmo princípio, isto é, da avaliação das distâncias entre as observações ou entre vetores contendo um conjunto de observações. Ao somatório das distâncias contidas em um intervalo ε (pequeno) denomina-se de integral de correlação da série⁵, para séries aleatórias, o valor da integral de correlação ($C_{1,T}(\varepsilon)^n$, na fórmula abaixo) será pequeno, visto que os valores das observações distribuem-se normalmente em termos de um valor médio, e grande para séries não-lineares, visto que as observações distribuem-se de forma determinística. A integral de correlação para a série ordenada é dada por ($C_{n,T}(\varepsilon)$) na fórmula abaixo; seu valor será relativamente elevado porque a probabilidade de um número maior de observações estarem próximas é maior quando a série não for distribuída aleatoriamente. Dito de uma outra forma, se a série é independente e identicamente distribuída (i.e., se as observações são distribuídas aleatoriamente), a probabilidade de uma diferença ser inferior a ε é a mesma do que a de ser superior a esse valor; assim, se se representar essa série no diagrama de recorrência, ela aparecerá como a Figura 4. Os padrões só surgem quando a probabilidade das diferenças entre os valores das observações serem menores do que ε for maior do que a das séries IID.

A estatística BDS é então calculada como a diferença entre esses dois últimos valores, isto é, seu valor é dado pela integral de correlação da série original menos os valores dessa inte-

5 A expressão para a integral de correlação de uma série de pontos distribuídos no espaço m-dimensional é dada por:

$C_{m,T}(\varepsilon) = \sum_{t>s} I_\varepsilon(x_t^m, x_s^m) [2/T_m(T_m - 1)]$, onde $T_m = T - (m - 1)$, $x_t^m = (x_t \cdots x_{t+m-1})$ e $I_\varepsilon(x_t^m, x_s^m)$ é uma função indicador que iguala 1 se $\|x_t^m - x_s^m\| \leq \varepsilon$ e iguala zero nos outros casos

gral obtidos para séries de médias e variâncias idênticas, mas distribuídas aleatoriamente. Mais precisamente, o valor da estatística BDS, $W_{n,T}$, é dado por:

$$W_{n,T} = \frac{\sqrt{T}[C_{n,T}(\varepsilon) - C_{1,T}(\varepsilon)^n]}{\sigma_{n,T}(\varepsilon)}$$

Onde T é o número de observações considerado em uma amostra específica de observações, e σ uma estimativa do erro padrão assintótico de $[C_{n,T}(\varepsilon) - (C_{1,T}(\varepsilon))^n]$. As simulações para essa estatística realizada pelos autores mostram que ela tende a distribuir-se assintoticamente da forma normal padrão (ver, para mais detalhes: Brock *et al.*, 1991 e Hsieh, 1991).

O *software* desenvolvido por Dechert (1993) calcula o valor e a significância da estatística BDS, o que permite verificar se séries que apresentam padrões detectáveis visualmente passam também por esse teste de não-linearidade, isto é, apresentam estatísticas BDS com valores superiores aos valores críticos da distribuição normal padrão.

4 Resultados

4.1 A identificação de padrões gerais com o auxílio do diagrama de recorrência

A Figura 4 apresenta o diagrama de recorrência para a série do IBOVESPA mensal entre janeiro de 1978 e dezembro de 2000 filtrada da tendência, como explicitado na seção anterior.⁶

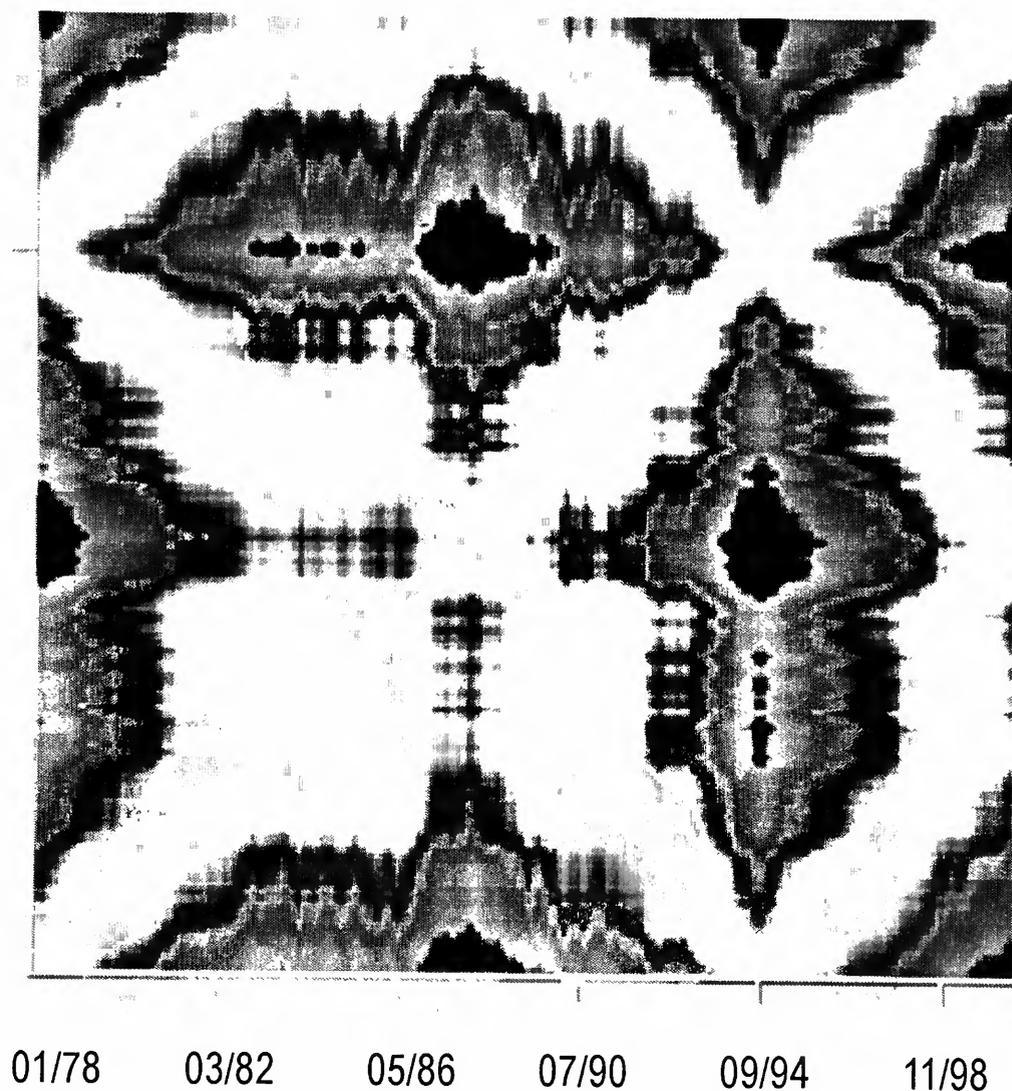
Na resolução a cores, distâncias maiores entre os resíduos são assinaladas com cores mais “frias” e vice-versa. Assim, observa-se a existência de uma fina estrutura nos dados que se torna mais marcada na figura que se forma na parte superior esquerda do diagrama e se reproduz no canto direito inferior. Como ocorre nos atratores caóticos, por exemplo no atrator que representa um conjunto de Mandelbrot,⁷ a dinâmica da série de resíduos parece ser

6 A equação estimada foi $\ln IBV = -23,9110 + 0,1370t$ $R^2 = 0,9588$.
(0,0000) (0,0000)

7 Ver, por exemplo, Creedy e Martin (1994, cap. 3); Anexo, apresenta-se uma representação do conjunto de Mandelbrot para efeito de comparação.

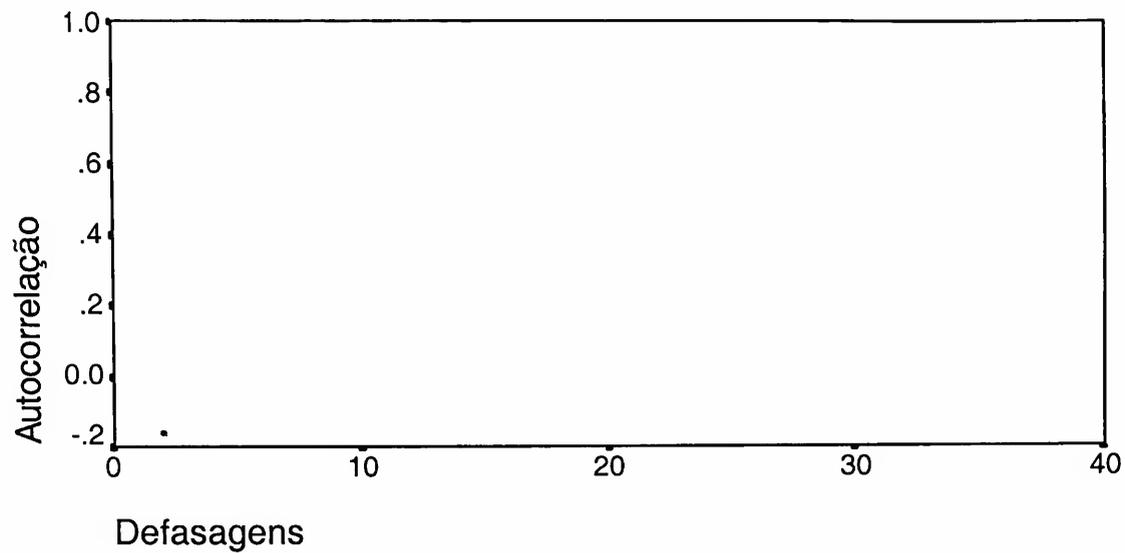
governada por um mecanismo basicamente determinista, embora muito sensível em relação às condições iniciais; isto pode ser verificado pela forma fractal das figuras que se reproduzem em escalas progressivamente menores (observe que a figura em verde reproduz em escala menor a figura em vermelho na faixa externa da figura completa e a figura azul, no centro, reproduz a figura em verde). Esta última característica é a propriedade mais típica e intrigante dos atratores caóticos, denominada de auto-similaridade. Observe-se que essa repetição de padrão nada tem a ver com uma possível sazonalidade nos dados, como mostrado pela função de autocorrelação parcial representada na Figura 5; caso houvesse sazonalidade, os dados da série tenderiam a mostrar algum grau de correlação com os dados correspondentes defasados em doze meses, que não é o que acontece.⁸

Figura 4
Diagrama de Recorrência para a Série Mensal de Resíduos do IBOVESPA



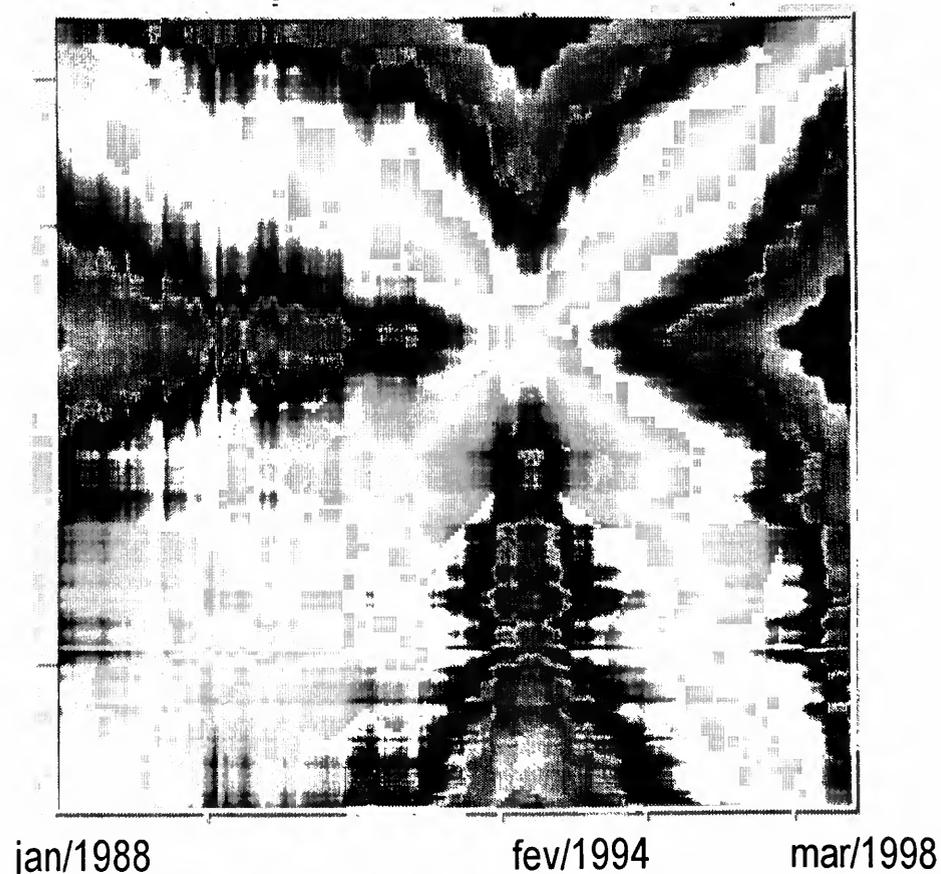
⁸ Ver por exemplo Pindyck e Rubinfeld (1998, p. 504).

Figura 5
Série de Resíduos do IBOVESPA - Função de Autocorrelação Parcial



Observe-se ainda que este mesmo padrão se forma se ao invés de se utilizar os resíduos da equação de regressão para dados mensais, utilizar-se dados diários. O diagrama representado na Figura 6, formando o mesmo padrão mostrado na Figura 4, foi construído com os resíduos da regressão de tendência para dados diários do IBOVESPA, no período janeiro de 1988/dezembro de 1998.

Figura 6
Diagrama de Recorrência para a Série Diária de Resíduos do IBOVESPA



O significado da propriedade de auto-similaridade, nesse contexto, é o de que a desordem e, portanto, a imprevisibilidade do sistema aumentam de acordo com certas regras as quais são, em princípio, identificáveis. Apenas para efeito de facilitar a compreensão, observe-se que, iniciando, por exemplo, em março de 1982 (Figura 4), os resíduos entre os valores estimados pela equação de regressão e os valores observados do IBOVESPA estão sempre muito próximos (isto é, a diferença entre eles é pequena) pelo menos até julho de 1990, quando começa a se formar a figura vermelha. Um pouco mais à frente (lembrando que as marcas no eixo das ordenadas correspondem simetricamente aos períodos destacados no eixo horizontal), forma-se a figura verde e, por volta de julho de 1994, a figura azul, que indica que o sistema encontra-se em seu mais elevado grau de instabilidade. É interessante observar que é fácil construir uma figura fractal, como a acima, a partir de um sistema perfeitamente determinista de equações diferenciais não-lineares, mas não há nenhuma razão para esperar que ela apareça em uma série de sinais, a menos que essa série seja produzida por um mecanismo determinístico. Existem boas razões, portanto, para supor que algum mecanismo deste tipo esteve em operação na década de 1990, o qual teria produzido uma dinâmica no mínimo semelhante à apresentada por muitos sistemas caóticos determinísticos já identificados em outras áreas de estudo. Na seção seguinte, procura-se testar rigorosamente essa possibilidade por meio da estatística BDS.

4.2 A identificação dos padrões ocultos

Focalizando a análise no período compreendido entre 01/03/1990 e 30/12/1998, dados diários de fechamento do IBOVESPA, constrói-se, em primeiro lugar, a série de retornos definida por:

$$R_t = \ln (IBV_t / IBV_{t-1})$$

O passo seguinte, uma vez que a primeira diferença normalmente remove a dependência linear nos dados (Hsieh, 1991), é eliminar a não-estacionariedade remanescente na série, removendo primeiramente a heterocedasticidade condicional nos dados por meio de modelos do tipo ARCH. Após essa filtragem, se se obtiver uma série em que os resíduos não estejam autocorrelacionados, de acordo com a estatística Q de Ljung-Box (e não houver indícios da presença de não estacionariedade produzida por mudança estrutural nos dados), haverá evidências da presença de não-linearidades compatíveis com caos determinístico se um número expressivo de estatísticas BDS para esses resíduos forem estatisticamente diferente de zero.

Após extraída a primeira diferença nos logaritmos, o modelo que minimizou o critério de Schwartz foi o AR (20) - GARCH (1,1), apresentado abaixo apenas com os termos estatisticamente significativos ao nível de 5% ou menos:

$$R_t = 0,00397 + 0,07842R_{t-1} + 0,05585R_{t-7} + 0,06073R_{t-8} + 0,04960R_{t-9} + 0,04382R_{t-17} + 0,03607R_{t-20}$$

$$h_t = 0,00001 + 0,14007\varepsilon_{t-1}^2 + 0,86456h_{t-1}$$

$$Q(8) = 3,037 \quad p(q) = (0,219)$$

$$Q(16) = 10,305 \quad p(q) = (0,414)$$

$$Q(24) = 24,423 \quad p(q) = (0,142)$$

$$Q(32) = 29,357 \quad p(q) = (0,295)$$

observações: 2155

A análise tradicional de volatilidade nos mercados financeiros pararia por aqui,⁹ considerando que, como não há correlação entre os resíduos tomados em grupos de 8, 16, 24 e 32 observações (as estatísticas Q não são significativas), o modelo teria captado qualquer possível padrão existente nos dados transformando a série de resíduos em ruído branco.

Entretanto, para isso ser verdade a série de resíduos $z_t = \frac{x_t}{\sigma_t}$ teria que passar no teste BDS, isto é, teria de gerar estatísticas BDS não significativas. Não é o que acontece nesse caso específico, ou seja, o modelo GARCH parece não captar toda a não-linearidade existente na série de retornos do IBOVESPA. A Tabela 1 apresenta as estatísticas BDS calculadas para a série de resíduos, considerando-se intervalos e de 0,5, 1,0, 1,5 e 2,0 desvios padrões normalizados pela amplitude da série e dimensões de imersão de 2 a 6.

9 Observe-se que o modelo acima é bastante semelhante aos estimados em outros trabalhos para o período, apresentando, em geral, as mesmas propriedades, como por exemplo o elevado grau de persistência a choques indicado pela presença de raiz próxima à unidade na equação da variância. Ver a respeito, entre outros, Morais e Portugal (1999).

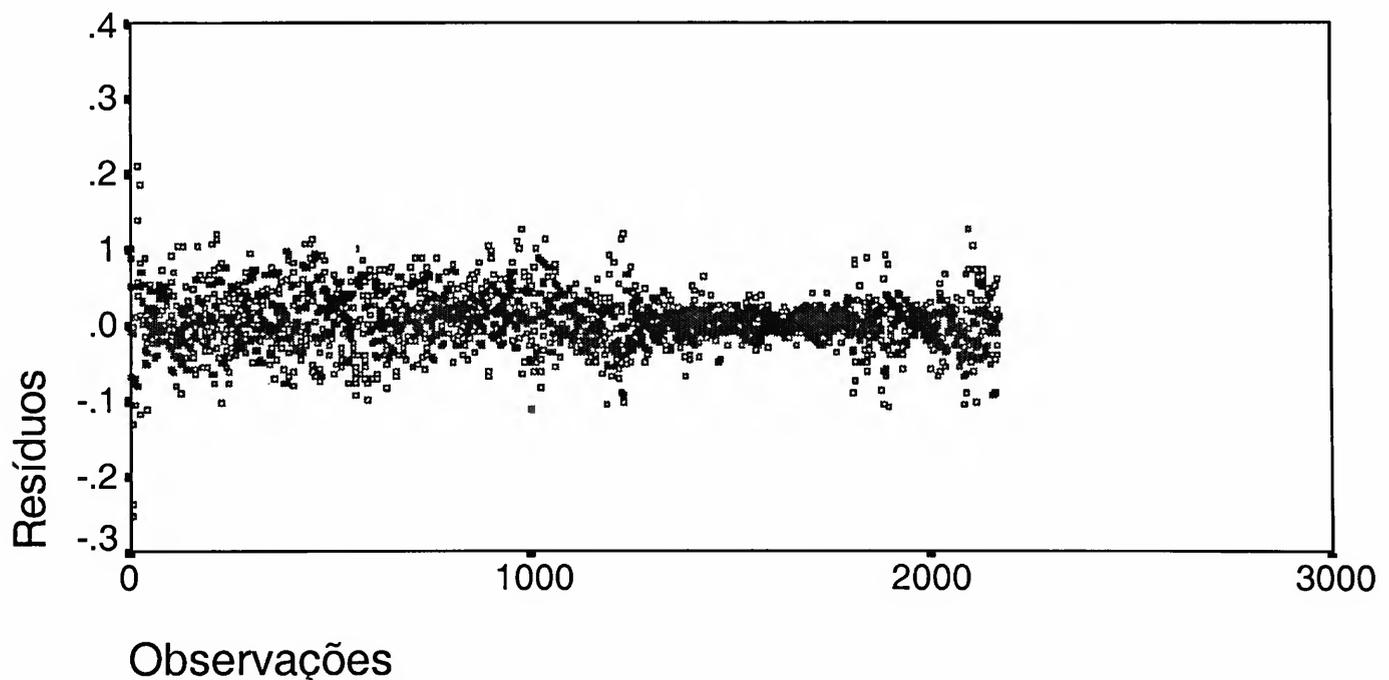
Tabela 1
Estatísticas BDS para a Série de Resíduos do Modelo
AR(20)-GARCH(1,1) do IBOVESPA Diário

	ε / σ			
	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
W2	0,589	1,080	0,944	0,587
W3	0,591	1,964*	2,113*	1,482
W4	0,591	2,549*	3,279*	2,528*
W5	0,446	2,756*	4,161*	3,505*
W6	0,318	2,709*	4,769*	4,412*

Os valores indicados com asterisco indicam estatísticas BDS significativas ao nível de 5% para teste bicaudal.

Resta finalmente verificar se as estatísticas BDS estariam captando algum processo de mudança estrutural nos dados. A Figura 7 indica que não parece ser esse o caso, pois a série de resíduos é visualmente estacionária; esta conclusão é corroborada pelo teste Phillips-Perron, que rejeita fortemente a hipótese de raiz unitária na série.

Figura 7
Resíduos Padronizados do IBOVESPA



Assim, o elevado número de estatísticas BDS significativas sugere a presença de algum tipo de ordem remanescente na série de resíduos, a qual, em razão das filtrações previamente realizadas, parece ser de natureza caótica.

5 Conclusão

Utilizando, de forma combinada, as técnicas do diagrama de recorrência e de filtragens sucessivas com modelos auto-regressivos do tipo ARCH, capazes de modelar a heterocedasticidade condicional, seguidas por testes realizados por meio da estatística BDS, acredita-se haver fornecido evidências acerca da presença de caos determinístico no IBOVESPA durante a maior parte da década de 1990. Não se explorou no texto a razão de por que exatamente o IBOVESPA tenha apresentado essa dinâmica no período. É tentador especular que o aprofundamento da abertura comercial na primeira metade dos anos 90 e os sucessivos choques produzidos pelas crises financeiras da segunda metade da década, que tornaram os mercados financeiros mais voláteis, tenham também os tornado mais “nervosos”, no sentido de reagirem com mais sensibilidade às variações nos fundamentos da economia. Para afirmar isso, entretanto, seriam necessários mais testes, o que está além dos objetivos do trabalho.

Por outro lado, considerando que os sistemas caóticos são imprevisíveis, devido à elevada sensibilidade em relação às condições iniciais, pode-se muito bem indagar qual o sentido prático de se realizar este tipo de trabalho. A justificativa inclui três argumentos.

Primeiro, um sistema caótico é imprevisível localmente, mas apresenta um grau de permanência identificável empiricamente no que se refere ao fato de apresentar atratores. Ou seja, se não se pode prever a evolução do sistema, digamos, mais de cinco períodos à frente, se é muitas vezes capaz de dizer os estados que o sistema **não** pode alcançar: as “zonas proibidas” do espaço de fase.

Um segundo argumento que justifica estudos como o aqui realizado é que há uma diferença fundamental entre sistemas que são imprevisíveis, em razão de estarem sujeitos a processos puramente aleatórios, e aqueles que são imprevisíveis por serem regidos por dinâmica caótica. Se se for capaz de separar uns dos outros, pode-se ganhar *insights* importantes sobre a dinâmica de curto prazo do sistema. Por exemplo, poder-se-á eventualmente concluir que o aumento da volatilidade do mercado de ações em um determinado período não se deva apenas, e nem principalmente, a uma série de choques aleatórios em mercados eficientes, mas ao fato de que esses choques colocam em ação mecanismos deterministas, ligados à formação de expectativas, que tornam o sistema intrinsecamente mais instável. Pode parecer pouco, mas também é possível que essa constatação possa fazer toda a diferença na composição de carteiras de investimento em momentos de instabilidade econômica.

O argumento final é o de que embora seja impossível fazer previsões de médio prazo em sistemas sujeitos à dinâmica caótica, tais sistemas apresentam, por assim dizer, uma certa

regularidade na produção de entropia, regularidade esta que poderia, em princípio, ser identificada e utilizada na elaboração de previsões de curto prazo. Em particular, é razoável acreditar que, mesmo em sistemas caóticos, técnicas não-lineares de previsão possam produzir estimativas melhores no curto prazo do que um gerador de números aleatórios.

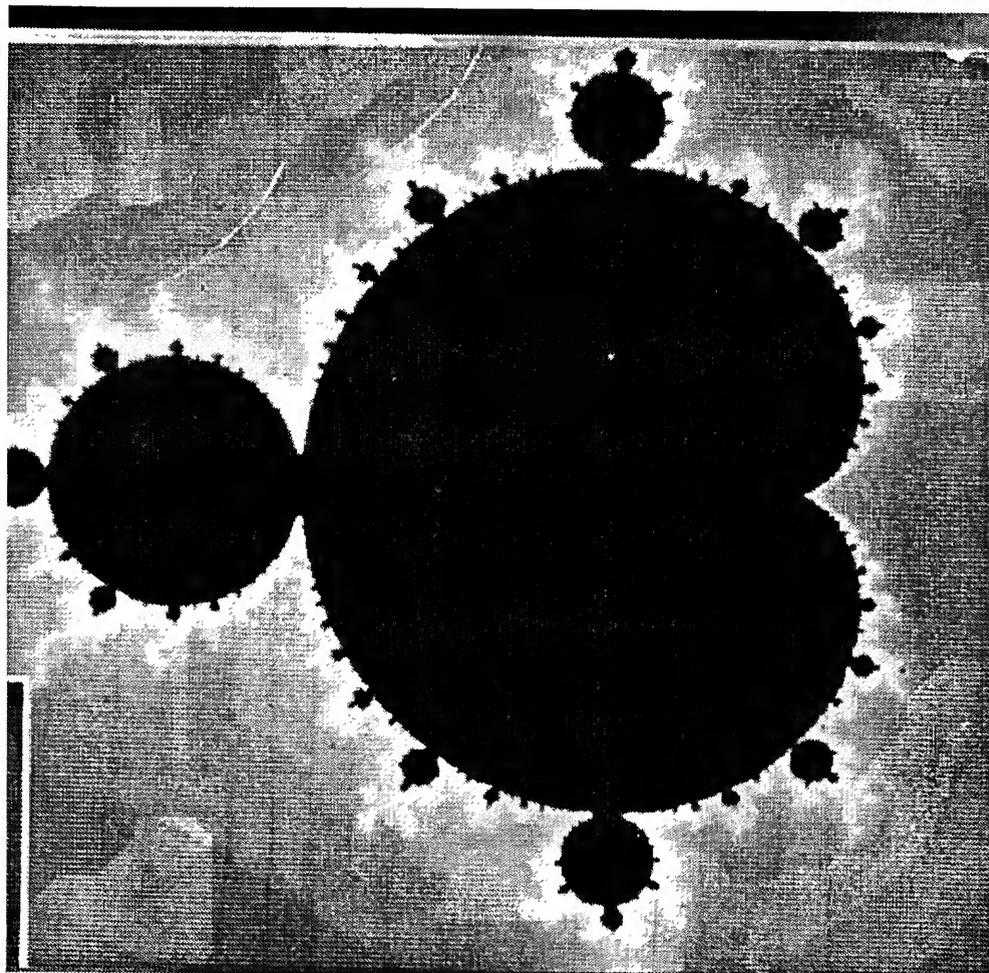
Referências

- Brock, W. D., Dechert, W., Scheinkman, J. *A test for independence based on the correlation dimension*. Working Paper, University of Wisconsin at Madison, 1987
- Brock, W. D., Hsieh, D., Lebaron, B.. *Nonlinear dynamics, chaos, and instability*. Cambridge, Mass.. MIT Press, 1991.
- Brock, W.; Potter, S. *Nonlinear time series and macroeconometrics*. Madison: Social Systems Research Institute, reprint series, n. 413, University of Wisconsin, 1993.
- Brock, W., Sayers, C. Is the business cycle characterized by deterministic chaos? *Journal of Monetary Economics*, 22, 1988.
- Casdagli, M., Eubank, S. (eds.) *Proc. 1990 NATO workshop on nonlinear modeling and forecasting*. Redwood City (Ca): Santa Fe Institute Series, Addison-Wesley, 1991.
- Creedy, J., Martin, V. *Chaos and non-linear models in economics*. Vermont: Edward Elgar, 1994.
- Dechert, D. *BDS stats*. Houston: Un. Houston, Dep. of Economics, 1993.
- Eckman, J. P.; Kamphorst, S. O., Ruelle, D. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, 4, 1987.
- Frank, M. Z., Stengos, T. Some evidence concerning macroeconomic chaos. *Journal of Monetary Economics*, 22, 1988.
- Gilmore, C. A new test for chaos. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 22, 1993.
- Gleick, J. *Caos - a criação de uma nova ciência*. Rio de Janeiro: Campus, 1990.
- Gleiser, I. *Caos e complexidade - a evolução do pensamento econômico*. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

- Hsieh, D. Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets. *Journal of Finance*, XLVI, 1991.
- Herbst, A. *Analysing and forecasting futures prices*. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- Herencia, M. Z.; Hotta, L. K.; Valls Pereira, P. L. Filtragem e previsão com modelos de volatilidade: volatilidade estocástica versus GARCH. *Revista Brasileira de Economia*, v. 52, n. 2, abr/jun. 1998.
- Herencia, M. Z., Hotta, L. K.; Valls Pereira, P. L., Ferreira, J.; Mechi, M. Volatilidade nos retornos da Telebrás: uma comparação entre abordagens ARCH em modelos de volatilidade estocástica. *Anais do XVII Encontro Brasileiro de Econometria*, 1995.
- Kononov, E. *Visual recurrence analysis (VRA)*. 1999
- Lebaron, B. Some relation between volatility and serial correlation in stock market returns. *Journal of Business*, v. LXV, 1992a.
- _____. *Persistence of the Dow Jones index on rising volume*. Madison: Social Systems Research Institute, W.P. n. 9201, University of Wisconsin, 1992b.
- Mayfield, E. S., Mizrach, B. On determining the dimension of real-time stock-price data. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 10, n. 3, July 1992.
- Morais, I., Portugal, M. Modelagem e previsão de volatilidade determinística e estocástica para a série do IBOVESPA. *Estudos Econômicos*, v. 29, n. 3, p. 303-341, jul./set. 1999.
- Pindyck, R., Rubinfeld, D. *Econometric models and economic forecasts*. Boston: Irwin McGraw-Hill, 1998.
- Ramsey, J., Sayers, C., Rothman, P. The statistical properties of dimension calculations using small data sets; some economic applications. *International Economic Review*, v. 31, n. 4, 1990.

Anexo

O Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Gleick (1990).

