

Apreçamento de opções de IDI usando distribuições hiperbólicas generalizadas*

José Santiago Fajardo Barbachan[§]

José Renato Haas Ornelas[□]

RESUMO

Este trabalho propõe uma metodologia para precificar a opção de IDI da BM&F utilizando um modelo que considera que o retorno do preço a termo do IDI segue uma distribuição Hiperbólica Generalizada (HG), e assim é derivada uma fórmula de apreçamento similar à de Black (1976). Também é feita uma estimação dos parâmetros deste modelo e chega-se à conclusão de que a HG se adequa melhor aos dados brasileiros do que à Normal. Finalmente, foram calculados os prêmios teóricos das opções para o modelo de Black com distribuição Normal Inversa Gaussiana (N.I.G.), e com distribuição Normal.

Palavras-chave: apreçamento de opções, distribuições hiperbólicas generalizadas, taxas de juros.

ABSTRACT

This paper proposes an option price model for the Brazilian IDI option of BM&F. The model considers that the forward price's return of the IDI follows a Generalized Hyperbolic (GH) distribution, and then is obtained an option pricing formula similar to Black (1976) formula. It is also done a parameter estimation of the model, and the conclusion is that the GH distribution has a better fit than the Normal distribution. Finally, the premium of the options were calculated with the Black model using a Normal Inverse Gaussian (NIG) distribution and a Normal distribution.

Key words: option pricing, generalized hyperbolic distributions, interest rates.

JEL classification: C52, G10.

* Agradecemos a Aquiles Farias pelo suporte computacional. As opiniões expressas neste artigo são exclusivamente dos autores e não refletem necessariamente a visão do Banco Central do Brasil.

§ Ibmecc Business School. E-mail: pepe@ibmeccrj.br

□ Banco Central do Brasil. E-mail: jrenato.ornelas@bcb.gov.br.

Recebido em outubro de 2002. Aceito em abril de 2003.

1 Introdução

O apreçamento de opções sobre ativos-objetos que dependem da taxa de juros possui uma vasta literatura, especialmente opções sobre títulos de renda fixa (veja Hull, 2000). O preço dessas opções reflete a expectativa do comportamento futuro da parte da estrutura a termo da taxa de juros entre o vencimento da opção e o vencimento do título.

Entretanto, as opções de I.D.I. (Índice de Depósitos Interfinanceiros) da BM&F possuem uma peculiaridade: elas refletem o comportamento da taxa de juros do dia da negociação até o vencimento da opção. Isso faz com que os modelos para de opções sobre títulos precisem ser adaptados para a realidade brasileira, como fizeram Vieira Neto e Pereira (2000), adaptando o modelo de Vasicek (1977) e Jamshidian (1989), Silva (1997), que usa o modelo de Black, Derman e Toy (1990), e Fajardo e Ornelas (2003) que utilizam o modelo C.I.R. (Cox, Ingersoll e Ross, 1985).

Entretanto, o modelo mais utilizado no mercado brasileiro é uma adaptação do modelo de Black (1976) para as opções de IDI. O modelo de Black foi desenvolvido originalmente para opções sobre contratos futuros ou preços a termo, mas também pode ser utilizado para opções sobre títulos, considerando o ativo-objeto como sendo o preço a termo do título. Uma adaptação similar é feita para o caso do IDI: utiliza-se o preço a termo do IDI como sendo o preço futuro na equação de apreçamento de opções de Black. Este enfoque, apesar de ser de fácil implementação, tem inconsistências teóricas, dentre as quais a de admitir taxas de juros nominais negativas.

O modelo de Black utiliza uma distribuição Normal para descrever o retorno do ativo-objeto, no caso o preço a termo. A proposta deste trabalho é substituir a distribuição Normal por uma distribuição Hiperbólica Generalizada (HG). Este tipo de troca é aconselhada em Raible (2000), em um estudo sobre retornos de títulos do governo alemão. O objetivo é desenvolver uma fórmula fechada para apreçamento de opções sobre IDI, supondo que o retorno do preço a termo do IDI segue uma distribuição HG. Desta forma, estaríamos propondo um modelo bastante parecido com o que é utilizado pelo mercado atualmente, mudando apenas a distribuição de probabilidade utilizada, tentando se adequar melhor aos dados brasileiros. Entretanto, este modelo tem novamente a inconsistência teórica de admitir taxas de juros nominais negativas.

Este trabalho terá a seguinte estrutura: na seção 2 será feita uma revisão bibliográfica com o referencial teórico de apreçamento de opções e das distribuições HG; na seção 3 será descrito o modelo proposto e na seção 4 a fórmula para a opção será derivada; a seção 5 terá uma implementação prática do modelo; e na seção 6 temos as conclusões.

2 Referencial teórico

2.1 Avaliação neutra ao risco

A metodologia de avaliação neutra ao risco é amplamente utilizada para avaliar o prêmio de uma opção, e o modelo de Black e Scholes (B&S) (1973), que utiliza deste tipo de avaliação é, sem dúvida, o mais utilizado para precificar opções sobre ações. Esta metodologia considera como dados os preços de um conjunto de ativos primários, assim como sua evolução estocástica, para então precificar um conjunto de ativos secundários. O apreçamento dos ativos secundários se faz pela construção de uma carteira composta por ativos primários, dinamicamente rebalanceada no tempo, de tal modo que o fluxo de caixa e o valor dessa carteira replicam o fluxo de caixa e o valor do ativo secundário. Assim, temos um mundo neutro ao risco, dentro do qual precificaremos as opções.

Para avaliar o preço de uma opção de compra de um título pré-fixado e outros tipos de opções sobre taxas de juros utiliza-se também a precificação livre de arbitragem. Normalmente os modelos para apreçamento de derivativos sobre taxas de juros se baseiam num processo estocástico para a taxa de juros de curto prazo (r) num mundo neutro ao risco. Um grande número de modelos considera apenas uma variável ou fator estocástico e, por isso, são chamados de modelos de um fator. O fator no caso seria a taxa de juros de curto prazo. Existem também os modelos de 2, 3, n fatores, onde se procura explicar o comportamento da taxa de juros em função não só do nível atual da taxa de juros de curto prazo, mas também das características da estrutura a termo da taxa de juros (inclinação, curvatura etc). Os modelos de um fator usualmente possuem a seguinte forma para o processo para r :

$$dr_t = m(r)dt + s(r)dW_t \quad (2.1)$$

onde: r_t é a taxa de juros de curto prazo; $m(r)$ é chamado de tendência (*drift*); $s(r)$ é chamado de difusão; t é o tempo e W_t é o processo de Wiener.

A função $m(r)$ pode representar um fato estilizado do comportamento das taxas de juros de curto prazo, que é a chamada reversão à média de longo prazo. Isto significa que se a taxa de curto prazo está acima da média de longo prazo, a sua tendência é de queda. Se estiver abaixo da média de longo prazo, a tendência é de alta. O primeiro artigo a propor comportamento de reversão à média foi Vasicek (1977), que considerou que a taxa de juros *spot* segue um processo do tipo:

$$dr_t = \beta (\alpha - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.2)$$

onde α , β e σ são constantes positivas.

Portanto, o primeiro termo do lado direito da equação mostra que r deve orbitar em torno de α , que deve ser considerado como a taxa de juros de longo prazo. β será a velocidade com que essa reversão deve ocorrer. Então, se $r - \alpha > 0$, o primeiro termo vai forçar a taxa de juros de curto prazo r a cair, e vice-versa. Quanto maior for β , maior será a velocidade da queda ou da alta. Se $r = \alpha$, o primeiro termo desaparece, estando apenas o segundo termo, que é estocástico e normalmente distribuído. σ é a volatilidade instantânea da taxa de juros.

Vasicek obteve então uma expressão analítica para o preço de um título pré-fixado baseado no processo acima. Mais tarde, Jamshidian (1989) desenvolveu uma fórmula de apreçamento de opções européias sobre títulos pré-fixados usando o modelo de Vasicek. Um dos problemas do modelo de Vasicek é que as taxas de juros nominais podem se tornar negativas. Outro problema é que a volatilidade da taxa de juros é constante, o que não acontece nos dados reais. Vieira Neto e Pereira (2000) desenvolveram uma fórmula fechada para a avaliação de opções sobre IDI supondo que a taxa de juros de curto prazo segue esse processo de reversão à média de Vasicek.

Para tentar resolver o problema das taxas de juros nominais negativas, Cox, Ingersoll e Ross (1985) criaram um modelo conhecido como CIR, onde o termo estocástico aparece multiplicado por \sqrt{r} . Dessa forma, quando a taxa de juros cresce, sua variância também sobe, e vice-versa. O processo, que também apresenta reversão à média, é o seguinte:

$$dr_t = \beta (\alpha - r_t)dt + \sqrt{r_t}\sigma dW_t \quad (2.3)$$

Uma restrição se aplica aos parâmetros, para que as taxas de juros sejam não-negativas. É necessário, então, que: $2\alpha\beta \geq \sigma^2$

Cox, Ingersoll e Ross também desenvolveram uma fórmula para precificar títulos pré-fixados e opções sobre títulos pré-fixados. Ornelas e Fajardo (2002) utilizam o modelo C.I.R. para desenvolver um fórmula fechada para a opção de IDI da BM&F

Um outro modelo, mais geral do que os anteriores, foi desenvolvido por Chan, Karolyi, Longstaff e Sanders (1992), e é conhecido como modelo CKLS. Ele também possui

reversão à média, e permite que a volatilidade da taxa de juros dependa de uma potência γ da própria taxa de juros. A equação seria a seguinte:

$$dr_t = \beta (\alpha - r_t) dt + r_t^\gamma \sigma dW_t \quad (2.4)$$

Note que os modelos de Vasicek e CIR são casos particulares do CKLS. Outros três modelos também podem ser considerados casos particulares do CKLS: Dothan, Brennan-Schwartz e Constantinides-Ingersoll. Os modelos de Dothan (1978) e Constantinides-Ingersoll (1984) não possuem reversão à média, mas têm a volatilidade aumentando junto com o nível da taxa de juros. Já o de Brennan-Schwartz (1980) possui reversão à média, e se distingue do CIR apenas pelo $\gamma = 1$ ao invés do 0,5 do CIR. A vantagem do CIR está na possibilidade de encontrar uma fórmula fechada para a opção. Entretanto, no trabalho de Chan *et alii* (1992) os modelos com $\gamma = 1$ se mostraram superiores aos com $\gamma = 0,5$, por meio de análises com dados reais de notas do Tesouro Americano de um mês, no período de 1964 a 1989.

Os modelos mostrados anteriormente apresentam um problema: a estrutura a termo das taxas de juros por eles gerada não se ajusta automaticamente à estrutura a termo vigente no mercado real. Para resolver esse problema surgiram os chamados modelos de não-arbitragem. Neles, as funções m e s passam a depender também do tempo, além de depender da taxa de juros de curto prazo r . As funções m e s são escolhidas de modo a ajustar os parâmetros do modelo à atual estrutura a termo. O modelo mais geral desta categoria é o HJM (Heath, Jarrow e Morton, 1992). Outros modelos bastante conhecidos são casos particulares do HJM: o de Ho-Lee (1986), Hull-White (1990) e BDT (Black, Derman e Toy, 1990).

O modelo de Ho-Lee foi o pioneiro, mas não possui reversão à média, apesar de permitir uma fórmula fechada para o preço da opção. Já o modelo Hull-White (1990) incorpora a reversão à média, sendo, na verdade, uma extensão do modelo de Vasicek, onde o termo de *drift* passa a ser uma função do tempo, e assim se ajusta à estrutura a termo vigente no mercado. Este modelo, portanto, permite taxas de juros negativas. Para as opções de IDI, o trabalho de Gluckstern, Francisco e Eid Jr. (2002) implementa o modelo de Hull-White (1990) utilizando a fórmula adaptada para o IDI de Vieira Neto e Pereira (2000).

O modelo BDT evita as taxas de juros negativas, mas, em contrapartida, não possui uma fórmula fechada, sendo necessário o uso de árvores binomiais ou trinomiais (ver Hull e White, 1996) para se chegar ao preço da opção. Para precificar a opção de IDI, o trabalho de Silva (1997) implementa o modelo BDT.

Apesar de toda a sofisticação teórica dos modelos apresentados anteriormente, o modelo que é mais utilizado no mercado brasileiro de opções de IDI é o modelo de Black (1976), que se destina a opções sobre futuros, mas também é bastante utilizado para a avaliação de opções sobre títulos pré-fixados. Trata-se de uma variação do modelo de Black e Scholes (1973), com o ativo objeto sendo um contrato futuro ao invés de ativo a vista.

Para utilizar o modelo de Black em opções sobre títulos usa-se o preço a termo do título no lugar do preço do contrato futuro. Ele não possui a chamada reversão à média, e a volatilidade do ativo-objeto é considerada constante. Só que no caso de títulos pré-fixados, quanto maior o tempo até o vencimento, maior a volatilidade. Somente no caso de a vida da opção ser muito curta em relação à vida do título-objeto é que poderíamos supor uma volatilidade relativamente constante durante a vida da opção, sendo também um problema o fato de ele admitir taxas de juros nominais negativas.

Para a opção de IDI, o mercado brasileiro costuma utilizar o modelo de Black usando como ativo objeto o IDI corrigido pela taxa de juros esperada (DI Futuro) até a data do vencimento da opção, ou seja, cria-se um preço a termo do IDI. O problema da volatilidade decrescente geralmente é amenizado por meio da utilização de uma volatilidade "média" (ver, por exemplo, o Apêndice IV de Ornelas, 2002):

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 (T - t)^2 / 3 \quad (2.5)$$

onde $\bar{\sigma}^2$ é a volatilidade média de um título com prazo de vencimento de uma unidade de tempo.

Então, a fórmula para uma opção de compra sobre IDI na data t seria:

$$C(t) = IDI_t N(d_1) - EP_{t,T} N(d_2) \quad (2.6)$$

$$d_1 = \frac{\log(IDI_t / EP_{t,T}) + \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{6}}{\sigma^2 \sqrt{(T - t)^3 / 3}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\log(IDI_t / EP_{t,T}) + \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{6}}{\sigma^2 \sqrt{(T - t)^3 / 3}}$$

onde: $P_{t,T}$ é o preço em t de um título pré-fixado com vencimento em T , E é o preço de exercício, IDI_t é o valor do IDI em t e σ é a volatilidade de um título pré-fixado de prazo unitário.

Note que a volatilidade usada é a de um título pré-fixado de maturidade unitária, ou seja, de maturidade igual a uma unidade de tempo. Se estamos medindo o tempo em anos, seria a volatilidade de um título de um ano. Este modelo é o mais utilizado no mercado brasileiro atualmente, apesar das inconsistências teóricas.

2.2 Modelos com processos de Lévy

Os modelos descritos nos itens anteriores tinham sempre como base o processo de Wiener, que é um tipo particular de processo de Lévy, gerado por uma distribuição Normal. Mas nem sempre estas distribuições são as mais adequadas para modelar os ativos financeiros. Rydberg (1997) enumera vários fatos estilizados dos dados financeiros nos quais as distribuições escolhidas devem espelhar. Dentre eles estão as chamadas caudas grossas e a assimetria negativa.

As caudas grossas dizem respeito ao fato de as distribuições do mundo real apresentarem, em geral, caudas mais grossas do que a distribuição Normal. Isto significa que as probabilidades de ocorrerem retornos exagerados, positivos ou negativos, são mais comuns no mundo real do que na distribuição Normal.

O outro fato é que as distribuições do mundo real, em especial ações, possuem uma assimetria levemente negativa. A explicação seria que os agentes reagem a informações negativas com mais vigor do que a informações positivas.

O artigo de Barndorff-Nielsen (1977) foi o primeiro a utilizar a chamada distribuição Hiperbólica (uma subclasse da HG), só que no campo da Física - para representar a distribuição do tamanho de grãos de areia trazidos pelo vento. Eberlein e Keller (1995) introduziram as distribuições Hiperbólicas em finanças para tentar representar os fatos estilizados que a distribuição Normal não conseguia.

A distribuição Hiperbólica Generalizada é definida pela seguinte densidade:

$$HG(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \left(\delta^2 + (x - \mu)^2 \right)^{(\lambda - 0,5)/2} K_{\lambda - 1/2} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) e^{\beta(x - \mu)} \quad (2.7)$$

onde: K_x é a função de Bessel modificada e $a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$

Os parâmetros são números reais com as seguintes restrições (ver Prause, 1999):

$$\delta \geq 0, |\beta| < \alpha \text{ se } \lambda > 0$$

$$\delta > 0, |\beta| < \alpha \text{ se } \lambda = 0$$

$$\delta > 0, |\beta| \leq \alpha \text{ se } \lambda < 0$$

O parâmetro β determina a assimetria, e o parâmetro λ caracteriza certas subclasses, como veremos adiante. Já os parâmetros α e β juntos dão o formato da distribuição, enquanto μ é um parâmetro de localização, e δ um parâmetro de escala, comparável ao desvio padrão.

A função $a(\cdot)$ é introduzida para que a função de probabilidade acumulada da densidade definida em (2.7) tenha valores entre zero e um. Outras parametrizações são sugeridas para se conseguir invariância de escala e localização. Essas parametrizações invariantes de escala-localização são importantes quando queremos manter a forma da distribuição. A seguir, apresentam-se 3 destas parametrizações:

Segunda Parametrização: $\xi = \delta(\alpha^2 - \beta^2), \psi = \beta / \alpha$

Terceira Parametrização: $\xi = (1 + \xi)^{-1/2}, \kappa = \xi / \psi$

Quarta Parametrização: $\bar{\alpha} = \alpha\delta; \beta = \beta\delta$

A distribuição HG possui diversas subclasses, dentre elas a hiperbólica e a Normal Inversa Gaussiana (NIG). Para se ter a NIG, basta fazer $\lambda = -1/2$ e para a hiperbólica, $\lambda = 1$. Já a Normal é uma distribuição limite da HG, quando $\delta \leftarrow \infty$ e $\delta / \alpha \rightarrow \sigma^2$

A NIG possui uma propriedade especial: ela é fechada para convoluções. A convolução de distribuições NIG também é uma NIG:

$$NIG^{*t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = NIG(x; \alpha, \beta, t\delta, t\mu) \quad (2.8)$$

(a notação $*t$ significa a convolução t vezes da distribuição)

Esta propriedade torna o apreçamento de derivativos mais fácil, já que para o cálculo da esperança condicionada num mundo neutro ao risco é necessário calcular a convolução da distribuição. Já HG tem uma convolução, no caso geral, mais complicada:

$$HG^{*t}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{e^{\beta x}}{M_0^t(\beta)} HG(x; \lambda, \alpha, 0, \delta, \mu) \quad (2.9)$$

onde M_n é a função geradora do momento n

O processo de Lévy exige que os incrementos sejam independentes e estacionários. Processos de Lévy gerados por distribuições Normais não admitem saltos (descontinuidades) nos preços. Já os processos de Lévy gerados por distribuições HG admitem saltos. Essa dinâmica de saltos é que, provavelmente, vai permitir que eles se adequem melhor a dados diários, como é o caso do IDI.

Ao se adequar melhor aos dados de retornos de ativos financeiros, as distribuições HG reduzem os problemas de adequação aos dados reais das fórmulas de apreçamento de opções baseadas em distribuições normais, como a de B&S. O fato do B&S não captar corretamente os retornos extremos, positivos e negativos, é um dos motivos do chamado "Sorriso" (*Smile*) de volatilidade, ou seja, as volatilidades implícitas nos preços de mercado das opções são maiores nas opções com preços de exercício muito alto ou muito baixo em relação ao preço a termo na data de vencimento da opção. Desta forma, o gráfico da volatilidade implícita x preço de exercício tem a forma de um sorriso. Eberlein, Keller e Prause (1998) fazem uma análise do "Sorriso" de volatilidade do modelo B&S com distribuição Normal e com distribuição Hiperbólica para dados de opções de ações alemãs e chegam à conclusão que apesar da Hiperbólica ter mostrado uma performance melhor do que o B&S em testes estatísticos, ela não resolve todos os problemas de apreçamento. Os autores argumentam que o sorriso de volatilidade possui um componente que é intrínseco ao mercado: opções fora ou dentro do dinheiro perdem a liquidez, tornando-se mais arriscadas e também mais caras.

Já o trabalho de Keller (1997) desenvolve uma fórmula para precificar opções sobre ações análogas à de B&S, só que fazendo uso de uma distribuição HG ao invés de uma Normal. Mais detalhes podem ser encontrados nas dissertações de doutorado de Prause (1999) e Raible (2000). Para modelos de taxas de juros, o trabalho de Eberlein e Raible (1999) faz uma generalização do modelo HJM, usando um processo de Lévy dirigido por uma distribuição Hiperbólica, ao invés de uma Normal, como no HJM original.

Em Raible (2000) é proposto um modelo um pouco mais geral, com um HJM generalizado com processo de Lévy dirigido por distribuição Hiperbólica Generalizada, da qual a Hiperbólica é um caso particular, como já vimos. Também em Raible (2000) é feito um teste empírico de um modelo HJM generalizado, só que dirigido por uma NIG. O teste, feito em cima de dados de títulos pré-fixados do governo alemão de 1985 a 1995 mostrou que a NIG possui um ajuste aos dados reais muito melhor do que a Normal. O autor sugere então que se troque o processo de Lévy dirigido pela Normal por um dirigido por uma HG, em especial uma NIG.

Para dados brasileiros, o trabalho de Fajardo, Schuschny e Silva (2001) estuda a aplicabilidade de modelos com processos de Lévy gerados por uma distribuição Hiperbólica para dados de ações brasileiras (Petrobrás, Telebrás e Ibovespa) para o período 1995 a 1998. Eles comparam a qualidade de ajuste da distribuição Hiperbólica com uma distribuição Normal e uma distribuição Pareto-Estável, e chegam à conclusão que a distribuição Hiperbólica gera um ajuste melhor que as outras.

Finalmente, o trabalho de Fajardo e Farias (2002) vai além das distribuições hiperbólicas, testando a qualidade de ajuste das distribuições Hiperbólica Generalizadas a dados de ações brasileiras de 1994 a 2001. É feita também uma comparação entre os resultados da HG com suas subclasses NIG e Hiperbólica. A conclusão é que a qualidade do ajuste aos dados das subclasses não é substancialmente pior do que a generalizada e, dependendo do objetivo, pode ser melhor usar as subclasses. A NIG seria adequada para o apreçamento de derivativos, dada a possibilidade de se calcular a sua convolução de maneira explícita. Já a Hiperbólica possui a vantagem de ser estimada de maneira extremamente rápida por precisar de menos avaliações da função Bessel modificada.

3 Modelo proposto

O modelo proposto terá um enfoque similar à adaptação do modelo de Black (1976) para opções de IDI, onde é usado o preço a termo do IDI como preço futuro na fórmula. Só que ao invés de supor que os retornos dos títulos pré-fixados seguem uma distribuição Normal, consideraremos que eles seguem uma distribuição Hiperbólica Generalizada.

O objetivo deste enfoque é conseguir uma adequação melhor aos dados brasileiros, conseguindo um apreçamento de opções mais eficiente, sem contudo mudar radicalmente o modelo utilizado pelo mercado. Portanto, este modelo também possui as deficiências teóricas do modelo de Black adaptado, como vimos na seção de referencial teórico.

Será utilizado neste modelo um regime de tempo contínuo. Considere-se um horizonte de tempo T , e um espaço de probabilidade (Ω, ζ, P) , onde Ω é o espaço amostral, ζ a sigma-algebra e P a medida de probabilidade. Considere-se também ζ_t um filtro crescente de ζ , com $0 \leq t \leq T$. Definiremos $A(t, w)$ como sendo uma conta remunerada pela taxa de juros de curto prazo, definida pelo seguinte processo:

$$dA(t, w) = r(t, w)A(t, w)dt \quad \text{com} \quad A(0, w) = 1 \quad (3.1)$$

onde $r(t, w)$ é a taxa de juros nominal de curto prazo, no caso brasileiro a taxa do CDI e $w \in \Omega$ o estado de natureza.

Quanto ao mercado do modelo, será considerado um mercado incompleto. A hipótese de mercado completo é muito forte, e não traz facilidades adicionais para a derivação da fórmula. Entretanto, para um mercado incompleto existem várias medidas martingales equivalentes, ao contrário do mercado completo, onde só existe uma. Por isso é necessário escolher uma destas medidas, como veremos mais adiante.

Neste modelo não será usada uma equação diferencial estocástica para modelar a taxa de juros de curto prazo r , mas sim uma expressão direta para a distribuição de preços dos títulos pré-fixados, como na equação a seguir:

$$p_{t,T}(r) = e^{-\int_t^T r(s) ds} \sim \text{Log - Hiperbólica Generalizada} \quad (3.2)$$

Este tipo de modelagem é parecido com a de Barndorff-Nielsen (1998), que modela diretamente o preço de uma ação, ao invés de usar uma equação diferencial para descrever o comportamento de uma ação. A equação usada por Barndorff-Nielsen, que é similar à solução da equação diferencial de B&S (1973), é a seguinte:

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad (3.3a)$$

onde S é o preço da ação, e X_t é um processo de Lévy gerado por uma distribuição NIG.

O retorno do ativo S , portanto, tem uma distribuição NIG, ao invés de uma distribuição Normal como em B&S. O modelo de B&S parte de uma equação diferencial como premissa para chegar a esse resultado. Já Barndorff-Nielsen usa (3.3a) como premissa, ou seja, assume como premissa o tipo de distribuição dos retornos do ativo.

O motivo de se utilizar este procedimento pode ser melhor entendido no trabalho de Eberlein, Keller e Prause (1998). Nele, os autores partem de uma equação diferencial estocástica similar à do modelo B&S, mas com o processo de Wiener sendo substituído por um processo de Lévy Hiperbólico:

$$dS_t = \mu S_{t-} dt + \sigma S_{t-} dX_t \quad (3.4)$$

onde S_{t-} significa o limite pela esquerda, e X_t aqui é um processo de Lévy Hiperbólico.

A solução desta equação pode ser encontrada pelo Lema de Itô ou pela solução de Doléans-Dade:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma X_t} + \prod_{s \leq t} (1 + \sigma \Delta X_s) e^{-\sigma \Delta X_s} \quad (3.5)$$

onde $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ significa um pulo no tempo s , caso ele exista.

Ainda segundo Eberlein, Keller e Prause (1998), a equação (3.5) não é adequada para modelar o preço dos ativos, já que admite valores negativos para os preços. A solução seria truncar os pulos negativos de X . Mas são justamente estes pulos que geram as caudas mais grossas. Por causa disso, os autores propõem a seguinte equação de difusão:

$$dS_t = \mu S_{t-} dt + \sigma S_{t-} dX_t + S_t (e^{-\sigma \Delta X_t} - \sigma \Delta X_t - 1) \quad (3.6)$$

cuja solução, pelo Lema de Itô é:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma X_t} \quad (3.7)$$

Dizemos, neste caso, que o preço S segue então um processo de Lévy exponencial. Note que a equação (3.7) é similar à equação proposta por Barndorff-Nielsen em (3.3a) e também à solução da equação diferencial do modelo de B&S. O que foi feito, na verdade, foi forçar que a solução da equação diferencial tenha um determinado formato. Optou-se, neste trabalho, pelo enfoque de Barndorff-Nielsen. Ou seja, a distribuição dos preços dos títulos pré-fixados será dada pela equação (3.2), como premissa. Vale lembrar que tanto o modelo HJM original quanto a sua versão para processos de Lévy mais gerais (Eberlein e Raible, 1996) também não usam uma equação diferencial para modelar a taxa de juros.

4 Derivação da fórmula

A equação (3.2) mostra que os retornos dos preços dos títulos pré-fixados possuem uma distribuição HG. Por meio de dados reais podemos estimar os parâmetros desta distribuição, que chamaremos de X :

$$X \equiv \ln(P_{t,T} / P_{t-\varepsilon,T}) \sim HG(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) \quad (4.1)$$

O preço a termo de A para o prazo T , avaliado em t ($t < T$), será expresso por $A(t, T)$. Ele pode ser escrito da seguinte forma:

$$A(t, T) = A(0) e^{\int_0^T r(s) ds} = A(t) / e^{-\int_0^T r(s) ds} = A(t) / P_{t,T} \quad (4.2)$$

Como $A(t)$ é uma constante se estamos no tempo t , o retorno de $A(t, T)$ passa a ser o retorno dos títulos com o sinal trocado. Chamemos de Y uma variável aleatória que representa o retorno do preço a termo do índice de IDI, $A(t, T)$, no período de t a T . Então:

$$Y \sim -X \quad (4.3)$$

Assim, estimando a equação (4.1) com dados reais conseguiríamos os parâmetros da equação (4.3). Uma vez dispendo da distribuição no mundo real, precisamos encontrar a distribuição num mundo neutro ao risco. Isso é feito por meio da chamada Transformada de Esscher (1932). O primeiro trabalho a propor o apreçamento de derivativos usando a Transformada de Esscher foi o de Gerber e Shiu (1994).

Como no modelo anterior, vamos supor que não existem oportunidades de arbitragem, e que, portanto, existe uma medida martingale equivalente Q_v . A Transformada de Esscher fornece uma medida martingale equivalente (ver Chan, 1999) para este modelo. Outras justificativas para a escolha desta medida martingale específica podem ser encontradas na chamada Teoria da Dualidade (ver Goll e Ruschendorf, 2000). Apesar de neste caso de processo de Lévy exponencial a medida martingale mínima não coincidir com a medida martingale dada pela Transformada de Esscher, ambas as medidas são muito próximas, segundo Prause (1999).

A transformada de Esscher tem um efeito similar ao Teorema de Girsanov do modelo anterior. Ela transforma a dinâmica dos preços do "mundo real" (Ω, ξ, ξ_p, Q_v) para a dinâmica dos preços num mundo neutro ao risco, da seguinte forma:

$$dQ_v = \frac{e^{\nu X_t}}{\tau \ln(M(\nu))} dP \quad (4.4)$$

A variável ν é o chamado parâmetro de Esscher, M é a função geradora de momentos e $\tau = T - t$. O parâmetro ν pode ser calculado por meio da resolução da seguinte equação, segundo Keller (1997):

$$\ln(1/P_{t,T}) = \ln\left(\frac{M(\nu+1)}{M(\nu)}\right) \quad (4.5)$$

Esta equação pode ser resolvida por algoritmos de resolução numérica de equações, como o *refined bracketing method* (ver Prause, 1999) ou por meio do método *downhill simplex* (ver Fajardo e Farias, 2002).

Dada a distribuição de X no mundo real (equação 4.1), a distribuição de X num mundo neutro ao risco Q_ν seria então (ver Prause, 1999 ou Keller, 1997):

$$X \stackrel{Q}{\sim} HG^{*,\nu}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{e^{\nu x}}{M'(\nu)} HG(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) \quad (4.6)$$

O *pay-off* de uma opção de IDI será o seguinte:

$$C(T) = \max\{0, A(T) - E\} \quad (4.7)$$

onde T é a data de vencimento da opção, E o preço de exercício, e C o preço da opção.

Da solução de Feynman-Kac, temos:

$$C(t) = E^Q \left[C(T) e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \xi_t \right] \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) em (4.8), e usando (4.2) temos:

$$\begin{aligned} C(t) &= E^Q \left[\max\{0, A(T) - E\} e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \xi_t \right] = \\ &= E^Q \left[\max\{0, A(t) e^{-X} \div P_{t,T} - E\} e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \xi_t \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Fazendo a suposição de que o valor esperado dos retornos das taxas de juros de curto prazo r está embutido no preço de mercado de um título pré-fixado de mesmo prazo temos:

$$E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| \xi_t \right] = P_{t,T} \quad (4.10)$$

Usando (4.10) em (4.9), temos:

$$E^Q \left[\max \{ 0, A(t)e^{-x} - EP_{t,T} \} \middle| \xi_t \right] \quad (4.11)$$

Usando (4.6) em (4.11) e resolvendo a esperança em Q :

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max \{ 0, A(t)e^{-x} - EP_{t,T} \} HG^{*t,v}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{-\ln EP/A(t)} (A(t)e^{-x} - EP_{t,T}) HG^{*t,v}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

E usando (4.5) e definindo $h = \ln EP/A(t)$ para simplificar a notação, obtemos:

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_{-\infty}^{-h} A(t)e^{-x} HG^{*t,v}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) dx - \int_{-\infty}^{-h} EP_{t,T} HG^{*t,v}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) dx = \\ &= A(t) \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^{-x}}{M^r(v)} HG^{*t}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) dx - EP_{t,T} \int_{-\infty}^{-h} HG^{*t,v}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

5 Implementação prática do modelo

5.1 Estimação dos parâmetros

Para testar empiricamente este modelo estimaremos os parâmetros da HG usando os dados dos retornos logarítmicos dos Swaps Pré-DI com prazos de 180 e 360 dias, que são os mais líquidos da BM&F. O período de dados será de 1º de janeiro de 1995 até 22 de março de 2002, com 1.784 observações. Estimaremos também os parâmetros da distribuição Normal para, na próxima seção, podermos verificar qual distribuição se adequa melhor aos dados dos Swaps, por meio do cálculo das distâncias de Kolmogorov, Anderson-Darling e Kuiper.

Para estimar os parâmetros da distribuição HG usaremos os programas escritos em MatLab desenvolvidos por Fajardo e Farias (2002). Nele os parâmetros da HG são estimados usando-se máxima logverossimilhança com os parâmetros sujeitos às restrições indicadas no item 2.2. O algoritmo utilizado é uma adaptação do "Downhill Simplex" da biblioteca do MatLab. Mais detalhes encontram-se em Fajardo e Farias (2002).

Nas Tabelas 1 e 2 são apresentados os parâmetros estimados da HG para valores de λ entre -3 a +3, com variações de 0,5. Este intervalo foi escolhido tendo como base o trabalho de Prause (1999), e os valores variam de 0,5 em 0,5 por questões numéricas. Já a função Bessel possui propriedades que tornam sua avaliação mais rápida para tais valores de λ . Na última linha de cada tabela encontra-se o valor ótimo de λ com seus parâmetros estimados. Não é possível fazer um teste estatístico ou calcular o nível de significância da estimação dos parâmetros em virtude de não existirem estatísticas tabuladas para a HG.

Tabela 1
Parâmetros Estimados para a HG - Swap de 360 dias

| Lambda | Alfa | Beta | Delta | Mi |
|--------|---------|------------|----------|----------|
| -3,00 | 1,414 | -2,98E-03 | 1,02E-02 | 2,71E-04 |
| 2,50 | 1,414 | 7,44E-04 | 8,72E-03 | 2,71E-04 |
| -2,00 | 1,414 | -1,44E-03 | 7,14E-03 | 2,68E-04 |
| -1,50 | 1,414 | -1,62E-03 | 5,45E-03 | 2,59E-04 |
| -1,00 | 1,414 | -3,62E-03 | 3,64E-03 | 2,43E-04 |
| -0,50 | 20,034 | -6,22E-04 | 1,88E-03 | 1,98E-04 |
| 0,00 | 68,091 | 8,04E -04 | 6,30E-04 | 8,04E-05 |
| 0,50 | 151,369 | 3,11E-02 | 6,61E-09 | 6,95E-11 |
| 1,00 | 232,210 | 4,99E-03 | 9,29E-06 | 9,29E-06 |
| 1,50 | 284,560 | 6,12E-03 | 1,33E-04 | 1,33E-04 |
| 2,00 | 323,907 | -1,51E -03 | 1,83E-04 | 1,83E-04 |
| 2,50 | 356,202 | -6,07E-04 | 2,03E-04 | 2,03E-04 |
| 3,00 | 384,069 | 2,86E-03 | 2,11E-04 | 2,11E-04 |
| -0,10 | 56,278 | 9,63E-03 | 8,46E-04 | 1,13E-04 |

Tabela 2
Parâmetros Estimados para a HG - Swap de 180 dias

| Lambda | Alfa | Beta | Delta | Mi |
|--------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 3,00 | 1,414 | 3,78E -04 | 5,41E -03 | 1,60E -04 |
| -2,50 | 1,414 | 6,32E -03 | 4,62E -03 | 1,60E -04 |
| -2,00 | 1,414 | 3,33E -03 | 3,80E -03 | 1,52E -04 |
| -1,50 | 1,414 | 2,33E -03 | 2,92E -03 | 1,56E -04 |
| -1,00 | 1,414 | 2,64E -03 | 1,98E -03 | 1,46E -04 |
| -0,50 | 45,857 | 5,22E -04 | 1,08E -03 | 1,27E -04 |
| 0,00 | 145,995 | 2,46E -03 | 4,70E -04 | 8,65E -05 |
| 0,50 | 275,938 | 1,44E -02 | 3,62E -09 | 1,19E -11 |
| 1,00 | 437,805 | 2,56E -02 | 9,74E -06 | 9,74E -06 |
| 1,50 | 539,659 | 1,86E -03 | 8,76E -05 | 8,76E -05 |
| 2,00 | 616,226 | 1,77E -03 | 1,11E -04 | 1,11E -04 |
| 2,50 | 679,042 | 1,75E -03 | 9,02E -05 | 9,02E -05 |
| 3,00 | 732,926 | 2,63E -03 | 1,23E -04 | 1,23E -04 |
| 0,50 | 275,938 | 1,44E -02 | 3,62E -09 | 1,19E -11 |

5.2 Comparação das distâncias e testes

Nesta seção será verificada qual distribuição se adequa melhor aos dados dos Swaps. Isto será feito por meio do cálculo das distâncias de Kolmogorov, Anderson-Darling e Kuiper. Também faremos o teste de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper, ambos com a hipótese nula de que a distribuição teórica é igual à empírica.

A distância de Kolmogorov é definida como sendo a maior distância em módulo entre a distribuição empírica e a distribuição teórica estimada para todos os valores possíveis:

$$D_{Kol} = \max_{x \in \mathcal{R}} |f_{Emp}(x) - f_{Teo}(x)| \quad (5.1)$$

onde f_{Emp} é a função de distribuição acumulada empírica e f_{Teo} é a função de distribuição acumulada teórica estimada.

Já a distância de Kuiper é semelhante à de Kolmogorov, mas se preocupa com o sentido do desvio, somando a maior distância para cima com o módulo da maior distância para baixo:

$$D_{Kui} = \max_{x \in \mathfrak{R}} \{f_{Emp}(x) - f_{Teo}(x)\} + \max_{x \in \mathfrak{R}} \{f_{Teo}(x) - f_{Emp}(x)\} \quad (5.2)$$

A terceira distância calculada é a de Anderson-Darling, que é a distância de Kolmogorov com uma ponderação, com o intuito de dar maior importância à distância nas caudas da distribuição. A fórmula é:

$$D_{ad} = \max_{x \in \mathfrak{R}} \frac{|f_{Emp}(x) - f_{Teo}(x)|}{\sqrt{f_{Teo}(x)(1 - f_{Teo}(x))}} \quad (5.3)$$

Para o cálculo das distâncias, novamente foram utilizados os programas de Fajardo e Farias (2002). Os resultados estão nas Tabelas 3 e 4 para os Swaps de 360 e 180 dias, respectivamente:

Tabela 3
Testes e Estatísticas HG e Normal - Swap de 360 dias

| Lambda | Kolmogorov | | Anderson-Darling | Kuiper | |
|--------|-------------|-----------|------------------|-------------|------------|
| | Estatística | Valor-p | Estatística | Estatística | Valor-p |
| Normal | 1,90E -01 | 1,16E -56 | 4,39E+09 | 0,364387 | 1,20E -204 |
| -3,00 | 9,48E -02 | 2,06E -14 | 1,59E+00 | 0,186107 | 4,43E -52 |
| 2,50 | 8,61E -02 | 5,50E -12 | 9,38E -01 | 0,168098 | 3,25E -42 |
| -2,00 | 7,47E -02 | 3,97E -09 | 5,40E -01 | 0,144797 | 5,73E -31 |
| -1,50 | 5,88E -02 | 8,37E -06 | 3,53E -01 | 0,113221 | 1,80E -18 |
| -1,00 | 3,56E -02 | 2,14E -02 | 1,70E -01 | 0,069078 | 2,38E -06 |
| -0,50 | 3,00E -02 | 7,91E -02 | 7,09E -01 | 0,0464632 | 1,24E -02 |
| 0,00 | 9,79E -02 | 2,37E -15 | 1,52E+00 | 0,10435 | 1,57E -15 |
| 0,50 | 1,23E -01 | 5,86E -24 | 2,19E+00 | 0,135437 | 6,21E -27 |
| 1,00 | 1,04E -01 | 2,89E -17 | 4,43E+01 | 0,156941 | 1,29E -36 |
| 1,50 | 1,13E -01 | 1,74E -20 | 2,56E+02 | 0,206657 | 1,39E -64 |
| 2,00 | 1,22E -01 | 2,00E -23 | 8,42E+02 | 0,23103 | 3,91E -81 |
| 2,50 | 1,28E -01 | 5,61E -26 | 2,06E+03 | 0,246766 | 8,26E -93 |
| 3,00 | 1,33E -01 | 3,87E -28 | 4,24E+03 | 0,258166 | 9,41E -102 |
| -0,10 | 6,99E -02 | 4,85E -08 | 6,33E -01 | 0,0754185 | 1,06E -07 |

Tabela 4
Testes e Estatísticas HG e Normal - Swap de 180 dias

| Lambda | Kolmogorov | | Anderson-Darling | Kuiper | |
|--------|-------------|------------|------------------|-------------|-------------|
| | Estatística | Valor-p | Estatística | Estatística | Valor-p |
| Normal | 1,93E - 01 | 1,50E - 58 | 2,70E+08 | 0,351564 | 2,37E - 190 |
| 3,00 | 8,97E - 02 | 5,81E - 13 | 1,02203 | 0,167467 | 6,90E - 42 |
| 2,50 | 8,16E - 02 | 8,52E - 11 | 0,651505 | 0,15626 | 2,75E - 36 |
| -2,00 | 7,29E - 02 | 1,08E - 08 | 0,470589 | 0,142767 | 4,54E - 30 |
| -1,50 | 6,76E - 02 | 1,50E - 07 | 0,313072 | 0,127484 | 1,01E - 23 |
| 1,00 | 6,84E - 02 | 1,03E - 07 | 0,150464 | 0,113049 | 2,07E - 18 |
| 0,50 | 8,73E - 02 | 2,66E - 12 | 0,176577 | 0,119714 | 8,81E - 21 |
| 0,00 | 1,22E - 01 | 1,16E - 23 | 0,266952 | 0,165825 | 4,83E - 41 |
| 0,50 | 1,29E - 01 | 3,33E - 26 | 1,0293 | 0,208412 | 1,03E - 65 |
| 1,00 | 1,08E - 01 | 1,93E - 18 | 20,0982 | 0,185879 | 5,99E - 52 |
| 1,50 | 1,14E - 01 | 1,51E - 20 | 106,14 | 0,193158 | 3,20E - 56 |
| 2,00 | 1,21E - 01 | 3,19E - 23 | 325,963 | 0,204054 | 6,30E - 63 |
| 2,50 | 1,30E - 01 | 6,16E - 27 | 749,227 | 0,212868 | 1,26E - 68 |
| 3,00 | 1,32E - 01 | 1,20E - 27 | 1472,05 | 0,220788 | 5,94E - 74 |
| 0,50 | 1,29E - 01 | 3,33E - 26 | 1,0293 | 0,208412 | 1,03E - 65 |

Como pode ser visto nas tabelas anteriores, os dados dos Swaps indicam uma aderência da HG muito melhor do que a Normal em todas as três distâncias calculadas. Das subclasses da HG, a NIG foi a que apresentou melhores resultados, sendo estes inclusive melhores do que o caso geral da HG nas distâncias de Kolmogorov e Kuiper. Pode parecer incoerente que uma imposição paramétrica produza resultados melhores do que o caso irrestrito. Isto pode ser explicado pelo fato de o método de estimação usado (máxima verossimilhança) não levar em consideração tais distâncias. O caso irrestrito só deveria ser necessariamente melhor do que os casos com restrição caso o método de estimação dos parâmetros fosse um que minimizasse determinada distância.

Nos testes de hipótese, a hipótese nula de que a distribuição teórica é igual à distribuição empírica foi rejeitada em todos os casos para a Normal. Para o prazo de 180 dias a hipótese nula também foi rejeitada para todas as HGs. Para o Swap de 360 dias, temos as únicas não-rejeições com níveis de confiança aceitáveis, para os casos de $\lambda = -1$ e $\lambda = -0,5$

(NIG). Portanto, de maneira geral, os dados dos prazos mais longos se adequaram melhor à HG.

Esta conclusão está em consonância com o trabalho de Raible (2000) e só trabalha com títulos mais longos. Nele é feita uma comparação entre a Normal e a NIG para dados de títulos pré-fixados do governo alemão com prazos de 1 a 10 anos. A NIG apresentou uma distância de Kolmogorov menor do que a Normal em todos os prazos considerados. No teste qui-quadrado, a hipótese nula de Normalidade foi rejeitada. Também no qui-quadrado, a hipótese nula de que a distribuição empírica é uma NIG não pode ser rejeitada a um nível de confiança de 98%, para todos os prazos, exceto para as maturidades de 5 e 6 anos.

Apesar dos prazos do trabalho de Raible serem bem maiores que os utilizados neste trabalho, o fato é que a Normal é superada pela distribuição HG e suas subclasses. Entretanto, nem sempre podemos não rejeitar a hipótese nula de que a distribuição empírica é igual à HG. Há evidências que, para maturidades maiores, a HG parece ter uma qualidade de adequação aos dados reais melhor.

5.3 Análise gráfica

Para uma melhor visualização da aderência das distribuições teóricas à distribuição empírica podemos plotar o gráfico da densidade (em escala logarítmica) em função do retorno. Nos Gráficos 1 e 2 temos a visualização dos dados do Swap de 360 e 180 dias, respectivamente. Em cada gráfico plotamos as distribuições Normal, NIG, HG e empírica.

Uma simples inspeção visual já é suficiente para se notar que a aderência da HG e NIG aos dados reais é bem melhor do que a Normal. No entanto, a diferença de aderência entre a NIG e HG não pode ser notada visualmente. De maneira geral, as caudas das distribuições teóricas são mais achatadas do que a distribuição empírica.

Gráfico 1
Densidade x Retorno - Swap 360 dias

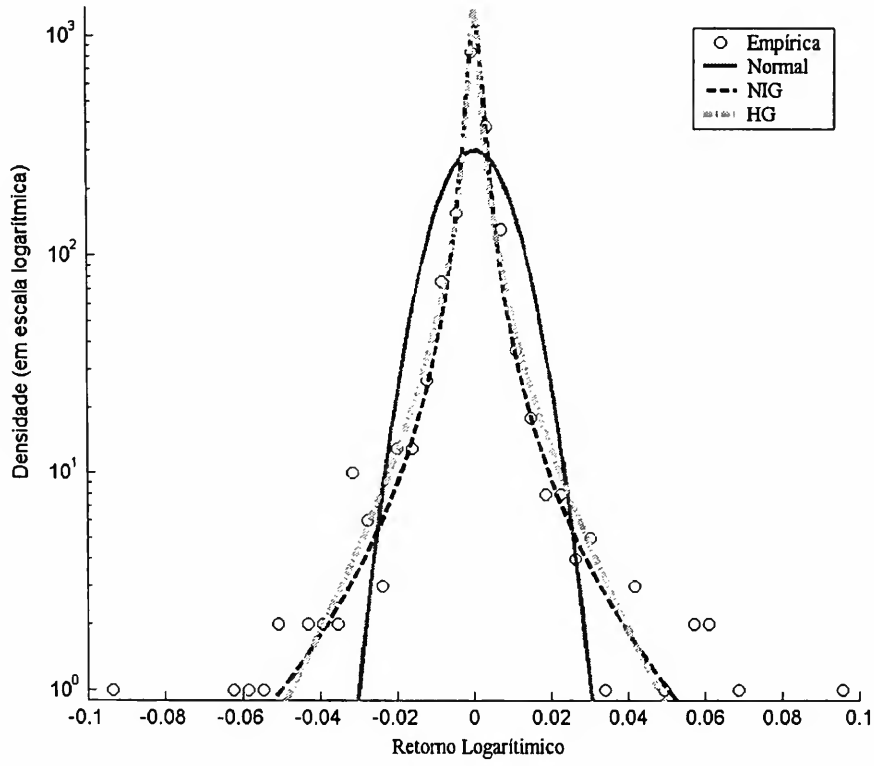
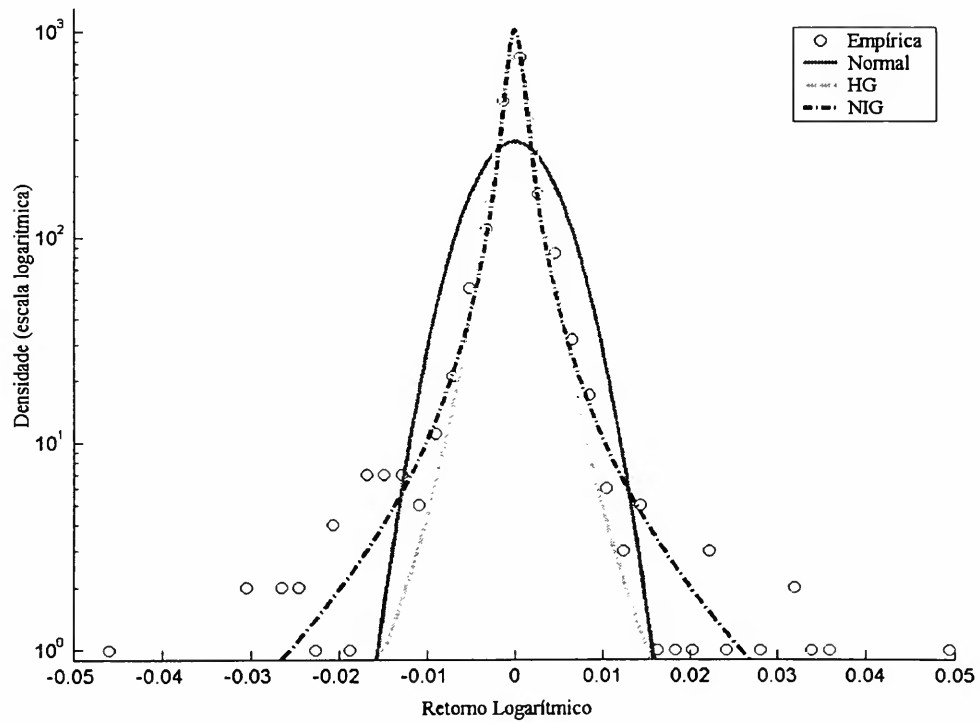


Gráfico 2
Densidade x Retorno - Swap 180 dias



5.4 Apreçamento de opções

Para a análise de apreçamento utilizaremos a equação (4.13), com uma alteração: ao invés de usar a distribuição HG, utilizaremos sua subclasse NIG. Isto porque, como visto na seção 2, o cálculo da convolução da HG é muito complicado e demorado, demandando o uso de Transformadas de Fourier (ver Fajardo e Farias, 2002 e Prause, 1999). Além disso, a NIG apresentou melhores resultados que o caso geral da HG nos teste de Kolmogorov-Smirnov e Kuiper, como vimos nas seções anteriores.

A equação (4.13) ficaria, discretizando $A(t)$ e usando a fórmula da convolução da NIG (2.8):

$$C(t) = IDI_t \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^{-x}}{M^r(v)} NIG(x; \lambda, \alpha, \beta, \tau\delta, \tau\mu) dx - EP_{t,T} \int_{-\infty}^{-h} NIG^{*t,v}(x; \alpha, \beta, \tau\delta, \tau\mu) dx \quad (5.4)$$

As integrais da equação acima têm que ser resolvidas por meio da utilização de métodos de integração numérica. Neste trabalho foi utilizado o método do trapézio, tal como implementado na função *trapz* do MatLab.

Tal como na adaptação do modelo de Black descrita na seção de Referencial Teórico, também aqui vamos tentar amenizar o erro provocado pelo pressuposto de variância constante. Para tanto, usaremos um novo parâmetro δ , de modo que a nova variância com este novo parâmetro seja a variância média até o vencimento da opção. A equação (2.5) fornece a variância média de um título até o seu vencimento em função da variância de um título de prazo unitário.

Então, a nova variância será a antiga vezes $\tau^2 / 3$. No entanto, para reescalar a distribuição, mantendo o formato, é preciso manter constantes os parâmetros da 2ª, 3ª ou 4ª parametrizações (ver item 2.2). Observando a 4ª parametrização, que é a mais simples, vemos que se multiplicarmos δ por uma constante k , temos que dividir α e β pela mesma constante k para manter a 4ª parametrização constante. Matematicamente:

$$\bar{\alpha} = (k\alpha)(\delta / k) = \alpha\delta$$

$$\bar{\beta} = (k\beta)(\delta / k) = \beta\delta$$

Particularizando para $\lambda = -1/2$, a equação para a variância da HG do lema 1.14 de Prause (1999), a fórmula para a variância de uma distribuição NIG é a seguinte:

$$\text{Var}(NIG(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)) = \delta \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}} \right) \quad (5.5)$$

Então, multiplicando δ por k , e dividindo α e β por k na fórmula da variância de NIG(5.5) temos:

$$\text{Var}(NIG) = K\delta \left(\frac{\alpha^2 / k^2}{(\alpha^2 / k^2 - \beta^2 / k^2)^{3/2}} \right) = K^2\delta \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}} \right)$$

Como queremos multiplicar a variância por $\tau^2/3$ basta fazer:

$$k^2 = \tau^2 / 3 \rightarrow k = \tau / \sqrt{3}$$

A equação (5.4) com as adaptações dos parâmetros δ , α e β seria:

$$C(t) = IDI_t \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^{-x}}{M^r(v)} NIG \left(x; \frac{\alpha\sqrt{3}}{\tau}, \frac{\beta\sqrt{3}}{\tau}, \frac{\tau^2\delta}{\sqrt{3}}, \tau\mu \right) dx - EP_{t,T} \int_{-\infty}^{-h} NIG^{*t,v} \left(x; \frac{\alpha\sqrt{3}}{\tau}, \frac{\beta\sqrt{3}}{\tau}, \frac{\tau^2\delta}{\sqrt{3}}, \tau\mu \right) dx \quad (5.6)$$

Falta então obter o parâmetro de Esscher. Para encontrá-lo, vamos resolver a equação (4.5) numericamente, utilizando a função `fzero` do MatLab, que usa uma mistura dos métodos de biseção, interpolação quadrática inversa e secante (mais detalhes em Forsythe *et alii*, 1976).

Para avaliar os prêmios gerados pela equação (5.6) é preciso calcular também o prêmio teórico segundo a adaptação do modelo de Black descrito na seção de Referencial Teórico. Para tanto, usaremos a volatilidade do Swap de 360 dias no período de 1995 a 2002, o mesmo utilizado para estimar os parâmetros da HG.

Para o cálculo do prêmio teórico das opções segundo a equação (5.6) foi desenvolvido um programa em MatLab. O conjunto de parâmetros utilizados depende do prazo de vencimento da opção. Vamos supor que estamos em abril de 2002, e queremos avaliar a opção de compra AB17, que tem vencimento em 1º de abril de 2003. Então os parâmetros mais adequados a serem utilizados são os do Swap de 360 dias (Tabela 1), já que estamos a aproximadamente 360 dias do vencimento da opção.

Os preços teóricos, segundo a equação (5.6), desta opção usando os parâmetros da Tabela 1 encontram-se na Tabela 5, assim como o preço de mercado e o preço teórico segundo o modelo de Black adaptado. Foram calculados os preços para alguns poucos dias, somente para mostrar a aplicação do modelo. Uma análise com um escopo temporal maior é necessária para conclusões acerca, por exemplo, do efeito sorriso.

Tabela 5
Comparação do Preço Teórico x Mercado da Opção AB17

| Data de Avaliação | Preço Teórico | | Preço de Mercado | | DI Abril Ajuste |
|-------------------|---------------|---------------|------------------|--------------|-----------------|
| | Black -NIG | Black -Normal | Oferta Compra | Oferta Venda | |
| 12/abr/2002 | 136,48 | 291,63 | 850,00 | 890,00 | 18.41% |
| 15/abr/2002 | 105,86 | 247,99 | 891,00 | 900,00 | 18.34% |
| 16/abr/2002 | 186,62 | 336,33 | 855,00 | 930,00 | 18.49% |
| 17/abr/2002 | 164,83 | 316,08 | | 890,00 | 18.46% |

Como podemos ver na Tabela 5, os preços teóricos são bem menores do que o de mercado. Diversas explicações podem ser dadas para este fato. A explicação que nos parece mais razoável é que os parâmetros foram calculados com base em dados passados, e o preço de mercado tende a refletir a expectativa do mercado para o futuro, em especial, a expectativa para a volatilidade do ativo-objeto da opção até o vencimento da opção. Além disso, a volatilidade implícita nos prêmios das opções é usualmente um estimador enviesado para cima da volatilidade futura. Existem diversos trabalhos na literatura mostrando que a volatilidade implícita superestima a volatilidade futura.

Outra explicação plausível é que a opção de IDI tem pouca liquidez, com os negócios concentrados em alguns poucos agentes. Desta forma, seria questionável supor que os preços convergem para seus valores teóricos. A presença de um grande número de investidores à procura de oportunidades de arbitragem é que movimentam os preços de forma que as arbitragens desapareçam.

Um fato que pode parecer curioso à primeira vista é que os preços do modelo de Black com Distribuição Normal apresenta valores dos prêmios das opções mais próximos dos valores de mercado do que o modelo com distribuição NIG, apesar da aderência dos dados dos Swaps ser muito melhor na NIG em relação à Normal, como vimos no item 5.2. A provável explicação para tal fato é que o mercado usa, na prática, o modelo de Black com

distribuição Normal. Além disso, o número de dias analisados foi muito pequeno para se extrair conclusões acerca de qual é o melhor modelo.

Para usar o modelo proposto neste artigo sugerimos calcular os parâmetros implícitos no preço de mercado da opção. Para tanto, podemos usar uma metodologia similar para calcular a volatilidade implícita no modelo de Black original. Só que ao invés de termos uma volatilidade-alvo, teremos um prêmio da opção-alvo, e então teríamos que ir alterando os parâmetros δ , α e β de modo a tornar o prêmio teórico igual ao prêmio de mercado e a 4ª parametrização constante.

6 Conclusão

Este trabalho desenvolveu um modelo para precificar opções de IDI da BM&F partindo do pressuposto de que os títulos pré-fixados possuem uma distribuição HG, para então chegar a uma fórmula do prêmio da opção de IDI por meio da transformada de Esscher. A modelagem com distribuição HG mostrou uma melhor adequação aos dados brasileiros do que a modelagem com distribuição Normal, que é a mais utilizada pelo mercado. Isto porque ele gerou distâncias de Kolmogorov, Anderson-Darling e Kuiper menores para a maioria dos prazos.

Também foi feita uma implementação prática do modelo, e os preços de mercado das opções foram menores que os de mercado. Como a comparação com o mercado foi feita com apenas poucos dados, faz-se necessária uma análise para uma série temporal maior para que possamos extrair conclusões mais claras acerca da utilidade do modelo proposto neste trabalho.

Como proposta para futuros trabalhos, podemos sugerir o estudo do efeito sorriso nos modelos aqui analisados. O problema é justamente a falta de liquidez da opção, que dificulta a obtenção de dados sincronizados da opção de IDI e do futuro de DI, já que este último possui uma liquidez muito maior que a opção.

Referências

Barndorff-Nielsen, O. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society London A*, p. 401-419, 1977.

- _____. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modeling. *Finance & Stochastics* 2, p. 41-69, 1998.
- Barndorff-Nielsen, O.; Blaesild, P. Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and application. *Statistical Distributions in Scientific Work*, v. 4, p. 19-44, 1981.
- Black, F.; Derman, E.; Toy, W. A one factor model of interest rates and its application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal* 46, p. 33-39, 1990.
- Black, F.; Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, p. 637-659, 1973.
- Black, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics* 3, p. 167-179, 1976.
- Brennan, M. J.; Schwartz, E. S. Analyzing convertible bonds. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 15, p. 907-929, 1980.
- Cassettari, A.; Ferrua Neto, L. A precificação de derivativos de taxa de juro no Brasil. *Resenha BM&F* 145, p. 35-47, 2001.
- Chan, T. Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes. *Annals of Applied Probability* 9, p. 504-528, 1999.
- Chan, K. C.; Karolyi, G. A.; Longstaff, F. A.; Sanders, A. B. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, 47, p. 1209-1227, 1992.
- Cox, J.; Ingersoll, J.; Ross, S. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53, p. 385-407, 1985.
- Constantinides, J.; Ingersoll, J. Optimal bond trading with personal taxes. *Journal of Financial Economics* 13, p. 299-335, 1984.
- Dothan, U. L. On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 7, p. 59-69, 1978.
- Eberlein, E.; Keller, U. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli* 1, p. 281-299, 1995.
- Eberlein, E.; Keller, U.; Prause, K. New insights into smile, mispricing, and value at risk: the hyperbolic model. *Journal of Business*, v. 71, n. 3, p. 371-405, 1998.
- Eberlein-Raible. Term structure models driven by general Lévy processes. *Mathematical Finance* 9, p. 31-53, 1999.

- Eberlein, E.; Prause, K. The generalized hyperbolic model: financial derivatives and risk measures. *Mathematical Finance*, p. 245-268, Bachelier Congress 2000.
- Esscher, F. On the probability function in the collective theory of risk. *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 15, p. 175-195, 1932.
- Fajardo, J.; Schuschny, A. R.; Silva, A. C. Processos de Lévy e o mercado brasileiro. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 21, n. 2, p. 263-289, 2001.
- Fajardo, J.; Farias, A. R. Generalized hyperbolic distributions and Brazilian data. *Working Paper Series* n. 52, Banco Central do Brasil, 2002.
- Fajardo, J.; Ornelas, J. R. H. Apreçamento de opções de IDI usando o modelo CIR. *Estudos Econômicos*, v. 33, n. 2, p. 287-323, abr./jun. 2003.
- Forsythe, G. E.; Malcolm, M. A.; Moler, C. B. *Computer methods for mathematical computations*. Prentice-Hall, 1976.
- Gerber, H. U.; Shiu, E. S. W. Option pricing by Esscher-transforms. *Transactions of the Society of Actuaries* 46, p. 99-191, 1994.
- Gluckstern, M. C.; Francisco, G.; Eid Jr., W. Aplicação do modelo Hull-White a precificação de opções sobre IDI. *Anais do Segundo Encontro Brasileiro de Finanças*, 2002.
- Goll, T.; Ruschendorf, L. *Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization*. Preprint, University of Freiburg, 2000.
- Harrison, J. M.; Pliska, S. R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications* 15, p. 313-316, 1981.
- Heath, D.; Jarrow, R.; Morton, A. Bond pricing and term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, v. 60, n. 1, p. 77-105, 1992.
- Ho, T. S. Y.; Lee, S. B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* 41, p. 1011-1029, 1986.
- Hull, J. *Options, futures, and other derivative securities*. Prentice Hall, 2000.
- Hull J.; White, A. Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, v. 3, n. 4, p. 573-592, 1990.
- _____. Using Hull-White interest-rate trees. *Journal of Derivatives*, Winter 1996.

- Jamshidian, F. An exact bond option formula. *Journal of Finance* 44, p. 205-209, 1989.
- Jarrow, R. A. *Modelling fixed income securities and interest rate options*. Editora McGraw-Hill, 1996.
- Keller, U. *Realistic modelling of financial derivatives*. 1997. Tese (Doutorado), University of Freiburg, Alemanha.
- Ornelas, J. R. H.; Fajardo, J. Precificação de opções de IDI usando a equação do modelo CIR. *Anais do XXVI ENANPAD - Encontro da Associação Nacional dos Programas de Pós-Graduação em Administração*, 2002.
- Ornelas, J. R. H. *Avaliação de opções de IDI da BM&F*. 2002. Dissertação (Mestrado), Universidade Católica de Brasília.
- Prause, K. *The generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives, and risk measures*. 1999. Tese (Doutorado), University of Freiburg, Alemanha.
- Raible, S. *Lévy processes in finance: theory, numerics, and empirical facts*. 2000. Tese (Doutorado), University of Freiburg, Alemanha.
- Rydberg, T. H. Why financial data are interesting to statisticians. *Working Paper 5*, Centre for Analytical Finance of the university of Aarhus, 1997.
- Silva, M. E. Uma alternativa para precificar opções sobre IDI. *Resenha BM&F* 119, p. 33-36, 1997.
- Vieira Neto, C. A.; Pereira, P. L. V. Closed form formula for the price of the options on the 1 day Brazilian Interfinancial Deposits Index IDI. *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Econometria*, Volume II, 2000.
- Vasicek, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5, p. 177-188, 1977.